Pre-service Mathematics Teachers' Understanding of Fundamental Calculus Definitions[*]

Muhammet Doruk
Hakkari University, Education Faculty, Department of Mathematics and Science Education, Hakkari, Turkey
Abdullah Kaplan[2]
Atatürk University, Kazım Karabekir Education Faculty, Department of Mathematics and Science Education, Erzurum, Turkey

Abstract

The purpose of this study is to explore pre-service primary mathematics teachers' understanding of fundamental definitions used in Calculus course. Formal definitions in function, sequence, limit, continuity and derivative topics were taken into consideration as the fundamental definitions of Calculus course. It was examined how pre-service teachers understand these definitions. The study was carried out in a state university located in Eastern Anatolia Region of Turkey and spring term of 2013-2014 academic year, with eight pre-service mathematics teachers who were junior at the department of primary mathematics education. The pilot study of the research was conducted with 10 pre-service primary mathematics teachers who were senior in the fall semester at the same university. The criterion sampling which is one of the purposeful sampling method was taken into consideration in selection of the research group. The criterion chosen by the research group is that the pre-service teachers have taken and successfully completed the Calculus courses in teaching mentioned subjects. Two successive groups, one with the average achievement and the other with the success, were separated by taking into account the achievements from related courses and their cumulative grade point average. The data of the study adopted qualitative research approach was obtained with semi-structured clinical interviews. The study's data was gathered in four weeks by interviewing with participants four times. During the interviews, the formal definitions of concepts were presented to the students at first, and then they were questioned about what they understood from the definitions in detail. As a result of the study, it was determined that the students understood the definitions in four different ways named as conceptual, erroneous, symbolic understanding and conceptual complexity. In this sense, it was emerged that some students had difficulty in conceptually understanding of formal definitions and confused concepts with each other.

Keywords: *Calculus course, Understanding of formal definitions, Pre-service mathematics teachers*

İnönü University
Journal of the Faculty of Education
Vol 19, No 3, 2018
pp. 117-140
DOI: 10.17679/inuefd.298371

Received : 16.03.2017
Accepted : 01.08.2018

Suggested Citation

Doruk, M., & Kaplan, A. (2018). Pre-service Mathematics Teachers' Understanding of Fundamental Calculus Definitions, *Inonu University Journal of the Faculty of Education*, 19(3), 117-140. DOI: 10.17679/inuefd.298371

[*]This study is a part of Muhammet DORUK's doctoral dissertation under the supervision of Abdullah KAPLAN

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

The analysis is to examine the nature or structure of something, especially by separating it into its parts, in order to explain or understand it (Oxford, 2010). Calculus is one of the lower branches of mathematics with Algebra, Geometry, Applied Mathematics and Topology. It is a type of mathematics that deals with the rate of change, such as the speed of a falling object or the slope of a curve (Oxford, 2010). On the other hand, it is one of the most important courses of mathematics-based undergraduate programs (Hartter, 1995). Content which is intensive in traditional calculus courses in universities is divided into categories according to a plan and these courses are processed in a certain order (Barak, 2007). One of the major goals of calculus, one of the main learning areas in mathematics, is to understand, interpret the changing quantities and phenomena and to forecast for the future (Çetinkaya, Erbaş and Alacalı, 2013).

When the literature is examined, it has been found that many researches have been conducted on the difficulties students have faced in their understanding of the basic concepts of analysis (Bezuidenhout, 2001; Davis and Vinner, 1986; Orton, 1983; Tall and Vinner, 1981; Williams, 1991). It has been found that studies focusing on the formal definitions that students have difficulty conceptually understanding, and studying students' comprehension are very limited. While researchers were predicting students' probable difficulties with formal definitions, they did very few studies that reflected students' understanding of formal definitions (Swinyard, 2011). In this sense, it can be said that researches focusing on how formal definitions are understood by students and what difficulties they have experienced are needed. As a result of these studies, lectures who are responsible for the teaching of calculus will have knowledge about the difficulties that lectures may not be aware of them. This study is the result of such an effort.

Purpose

In this study, the purpose of this study was to reveal out the preservice primary mathematics teachers' understanding of fundamental formal definitions in domain of calculus. Function, sequence, limit, continuity and derivative were taken into account as the fundamental formal definitions. It was examined what extend the preservice teachers internalized these formal definitions.

Method

The research group of the study consisted of eight preservice elementary mathematics teachers who were junior in the spring term of the 2013-2014 academic year at a state university. The pilot study was performed with 10 preservice elementary mathematics teachers who were senior in the fall term of the 2013-2014 academic year in the same university. The members of the research group were selected according to the criterion sampling method that is among the purposeful sampling methods. The criterion chosen by the authors is that the pre-service teachers have taken and successfully completed the calculus courses in teaching the mentioned concepts. The data of the study adopted qualitative research approach was obtained through semi-structured clinical interviews. The study's data was gathered in four weeks by interviewing with participants four times. During the interviews, the formal definitions of concepts were presented to the students at first, and then they were questioned about what they understood from the definitions in detail. Interviews were recorded with audio recorder. Firstly, audio records were transcribed in the study. While transcribing the data, discussions were made with the participants about the incomprehensible statements. Thus, incomprehensible statements were clarified. The content analysis was used in the analysis of data obtained from clinical interviews.

Findings

It has been revealed that the ways of understanding the definitions of the basic elements of the analysis of preservice teachers (function, sequences, limit, continuity and derivative) are grouped under four categories as conceptual, erroneous, symbolic understanding and conceptual complexity. Preservice teachers who are able to explain these definitions with mathematical facts and aware of the underlying meanings of the symbols, have been evaluated as having conceptual understanding. It has been determined that preservice teachers with a high level of academic achievement have mostly conceptual understanding. Preservice teachers having symbolic understanding can't explain the formal definition presented to them by their own cues, try to recreate the definition presented to them, and are not aware of the meanings underlying the expressions they describe. Some of the non-conceptual understandings have been evaluated under the category of concept complexity. Preservice teachers assessed in the concept complexity category attempted to express the definition with their own cues, but the descriptions they made pointed to the definitions of other concepts away from the definition of what was meant to be described. It has been seen that the last understanding of the preservice teachers who do not have conceptual understanding is erroneous understanding. Even if preservice teachers with erroneous understanding attempt to explain the definition presented to them with their own cues, there are mathematical mistakes or deficiencies in their explanations. In this sense, it has emerged that some preservice teachers have difficulty conceptually understanding formal definitions and confused concepts with each other. Moreover, it has been revealed that preservice teachers have concept images for the formal definitions which can be evaluated as misconceptions existing in relevant literature.

Discussion & Conclusion

The present study showed that preservice teachers had difficulty in understanding fundamental definitions of calculus. The difficulties identified were similar to those of previous studies (Bayazıt, 2008; Bezuidenhout, 2001; Bingölbali, 2008; Doruk and Kaplan, 2015; Habre and Abboud, 2006; Polat and Şahiner, 2007; Roh, 2008; Tall and Vinner, 1981; Vinner, 1983; Williams, 1991). Teaching should be done taking into consideration the difficulties that students have during teaching. Discussions can be made in the classroom on the differences between the mentioned concepts. It will be useful to focus on the points that students have difficulty in perceiving. It is advisable to give place problems which require conceptual knowledge to solve in the courses and to use them for evaluating these courses. Whether the learners have learned these definitions at conceptual level should be questioned. Because no matter how basic or simple the concepts are taught, sometimes there can be a great gap between the concept that the students are taught and the concept that the students really know (Tall and Bakar, 1992). During the teaching of formal definitions, necessary work should be done in order to ensure that the students have the correct concept images. The first method that comes to mind in these studies is to use visualization during teaching. Although there are researchers who think that visualization and learning are not useful in advanced mathematics classes (Alcock and Simpson, 2004), there are also researchers who think that they will provide positive contributions to the learning of real analysis (Pinto and Tall, 2002).

Matematik Öğretmeni Adaylarının Analizin Temel Tanımlarını Anlayışları†

Muhammet Doruk
Hakkari Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Hakkari, Türkiye.
Abdullah Kaplan
Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Erzurum, Türkiye.

Öz

Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının Analiz dersinin temel tanımlarını anlayışlarını ortaya çıkarmak ve bu tanımları nasıl anladıklarını sorgulamaktır. Analizin temel tanımları olarak fonksiyon, diziler, limit, süreklilik ve türev konularındaki formel tanımlar dikkate alınmıştır. Çalışma, 2013-2014 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında, Doğu Anadolu Bölgesi'nde yer alan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü sınıfında öğrenim gören toplam sekiz matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Çalışmanın pilot uygulaması ise güz yarıyılında, dördüncü sınıfta öğrenim gören 10 ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yapılmıştır. Araştırma grubunun seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi dikkate alınmıştır. Araştırma grubunun seçimindeki ölçüt öğretmen adaylarının sözü edilen konuların öğretiminin yapıldığı Analiz derslerini almış ve başarı ile tamamlamış olmalarıdır. Öğrencilerin ilgili derslerden elde ettikleri başarı ve genel ağırlıklı not ortalamaları dikkate alınarak ortalama başarıya sahip olanlar ile başarılı olanlar olmak üzere dörderli iki gruba ayrılmıştır. Nitel araştırma yaklaşımının benimsendiği çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler yardımıyla elde edilmiştir. Çalışmanın verileri her bir öğrenci ile dört defa görüşülmek suretiyle dört hafta sürmüştür. Görüşmelerde öğrencilere tanımlar sırayla formel olarak sunulmuş ve ne anladıkları ayrıntılı olarak sorgulanmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin tanımları kavramsal, hatalı, sembolik anlama ve kavram karmaşası olmak üzere dört farklı şekilde anladıkları tespit edilmiştir. Bu anlamda bazı öğrencilerin formel tanımları kavramsal olarak anlamakta güçlük yaşadıkları ve kavramları birbiri ile karıştırdıkları ortaya çıkmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Analiz dersi, Formel tanımları anlama, Matematik öğretmeni adayı.*

İnönü Üniversitesi
Eğitim Fakültesi Dergisi
Cilt 19, Sayı 3, 2018
ss. 117-140
DOI: 10.17679/inuefd.298371

Gönderim Tarihi : 16.03.2017
Kabul Tarihi : 01.08.2018

Önerilen Atıf

Doruk, M., & Kaplan, A. (2018). Matematik Öğretmeni Adaylarının Analizin Temel Tanımlarını Anlayışları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*,19(3), 117-140. DOI: 10.17679/inuefd.298371

† Bu çalışma, Muhammet DORUK'un Abdullah KAPLAN danışmanlığında hazırladığı doktora tezinin bir bölümüdür.

GİRİŞ

Analiz kelime anlamı olarak çözümleme (Türk Dil Kurumu [TDK], 2015), açıklamak ya da anlamak için özellikle parçalara ayırarak bir şeyin doğasını veya yapısını incelemektir (Oxford, 2010). Analiz; Cebir, Geometri, Uygulamalı Matematik ve Topoloji ile birlikte matematiğin alt dallarından birisidir. Analiz düşen bir nesnenin hızı ya da bir eğrinin eğimi gibi değişim oranı ile ilgilenen bir matematik çeşididir (Oxford, 2010). Ayrıca Analiz, matematik ağırlıklı lisans programlarının en önemli dersleri arasında yer almaktadır (Hartter, 1995). Üniversitelerdeki geleneksel analiz derslerinde yoğun olan içerik bir düzene göre kategorilere ayrılır ve bu dersler belli bir sıra gözetilerek işlenir (Barak, 2007). Matematikteki temel öğrenme alanlarından biri olan analizin en büyük hedeflerinden birisi değişen nicelikleri ve olguları anlamak, bunları yorumlamak ve geleceğe yönelik tahminlerde bulunmaktır (Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013). Üniversite seviyendeki Analiz derslerinde kullanılan kaynaklar incelendiğinde fonksiyonlar, diziler ve seriler, limit ve süreklilik, türev ve integral konularının yoğun olarak yer aldığı görülmektedir (Balcı, 1999; Kadıoğlu ve Kamali, 2003; Musayev, Alp ve Mustafayev, 2007; Yalçınkaya, 2012). Analiz alanındaki otoriteler de sırasıyla türev, integral, limit, diziler, seriler ve yaklaşma kavramlarını analizin en temel kavramları olarak değerlendirmektedirler (Sofronas vd., 2011).

Üniversite seviyesinde Analiz derslerinde kullanılan bazı ders kitapları (Balcı, 1999; Kadıoğlu ve Kamali, 2003; Musayev, Alp ve Mustafayev, 2007; Yalçınkaya, 2012) ile lise matematik öğretiminde kullanılan ilgili kaynak kitap (Çakımcı ve Kabasakal, 2016) ve öğretim programı (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013) incelendiğinde, analize konu olan kavramların öğretiminde içerik olarak olmasa da öğretim yöntemi bakımından bir takım farklılıkların olduğu görülmektedir. Üniversite seviyesindeki ilgili derslerin işlenişine bakıldığında lise öğretiminden farklı olarak formel tanımların önemli bir yer tuttuğu dikkati çekmektedir. Lise öğretiminde informel olarak verilmeye çalışılan kavramlar üniversite analiz derslerinde daha formel bir şekilde tanıtılmaktadır. Örneğin lise düzeyinde limit kavramı sezgisel bir şekilde tanıtılmaktadır. Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, o noktaya sağdan ve soldan yaklaştıkça fonksiyonun aldığı değerlerden yola çıkılarak tahmin edilmeye çalışılmaktadır. Bu düzeyde limitle ilgili teorem ya da kurallar genellikle ispatsız olarak sunulmaktadır. Üniversite düzeyinde ise limit kavramının tanıtımı formel limit tanımı ile yapılır. Limitle ilgili özellikler formel tanım kullanılarak ispatlanır. Buradan hareketle analiz derslerinde formel tanımların ön planda olduğu, öğrencilerin formel tanımı içselleştirerek etkin olarak kullanabilmelerinin önemli olduğunu söylemek mümkündür. Üniversite düzeyinde formel tanımlara önem verilerek öğrencilerin matematiğin sistemli ve yığılmalı bir bilim dalı olduğunu yakından görme fırsatı yakalayacakları söylenebilir. Bu düşünce ile paralel olarak Swinyard (2011), öğrencilerin matematiğin formel ve kesin kısmına geçiş yaptıkça formel limit tanımının ana eleman olarak görev yapmakta olduğunu ifade etmiştir.

Tanımsız kavramlar ve tanımlar, aksiyomlar ve teoremlerle birlikte matematiğin temel elemanlarıdır (Baykul, 2002). Kavram, bir nesnenin veya düşüncenin zihindeki soyut ve genel tasarımı, nesnelerin veya olayların ortak özelliklerini kapsayan ve onları bir ortak isim altında toplayan genel tasarım olarak tanımlanmaktadır (TDK, 2015). Buna göre matematiksel kavramlar, matematiksel nesne ya da düşüncelerin zihindeki genel tasarımı olarak değerlendirilebilir. Matematikteki nesnelerin çoğu soyut özellikte olduğundan, bu nesnelerin zihinde yer edebilmesi için tanımlanması önem arz etmektedir. Matematiksel olguların tanımlanması ve kuralların konulması; bazen günlük, pratik bir problemin ele alınmasından, bazen de matematiğin kendi iç dünyasının gerekliliği olarak ortaya çıkar (Olkun ve Toluk Uçar, 2009). Önceden tanımlanmış kavramlar ve tanımsız kavramlar yardımıyla açıklanan kavramları belirten ifadelere tanım denir (Baykul, 2002). Matematiğin yığılmalı bir bilim dalı olması sebebiyle tanımların kendinden sonra gelen tanımlara öncülük edecekleri söylenebilir. Matematiksel tanımlar oluşturulurken bazı temel unsurlara dikkat edilmelidir. Bir kavrama yönelik açıklamanın "tanım" olabilmesi için göz önünde bulundurulması gereken bazı ölçütler vardır. Bu ölçütler; hiyerarşik kavram yapısına dikkat edilmesi, var olan/olabilen olgunun tanımlanması, aynı kavrama ait farklı tanımların eş değer olduğunun ispatlanabilir olması, aksiyomatik yapıya uyması, gerekli ve yeterli koşulları belirtmesi ve ekonomik olması olarak sıralanabilir (Çakıroğlu, 2013).

Öğrencilerin analizin temel kavramlarını ne şekilde anladıklarını konu edinen araştırmacıların çoğu, anlayışlarının daha çok işlemsel olduğu, kavramsal anlamada eksikliklerin olduğunu rapor etmişlerdir (Ferrini-Mundy ve Lauten, 1993; Kertil, 2014; Zandieh, 2000). Burada sözü edilen işlemsel bilgi; matematik sembollerini ve gösterimlerini tanıma, kural ve formülleri bilme, verilen bir algoritmayı işlem basamaklarına uygun biçimde yürütebilme gibi becerileri gerektiren kavramaya dayanmayan tamamen mekanik bir bilgidir (Birgin ve Gürbüz, 2009). Rutin matematiksel soruları yapmakta kullanılan kural ve işlemlerle matematiksel bilgiyi temsil etmekte kullanılan sembolleri içerir ve aralarında mantıksal bağ vardır ancak kişinin bunları uygulayabilmesi için mantıksal nedeni anlaması zorunluluğu yoktur (Olkun ve Toluk Uçar, 2009). Kavramsal bilgi ise; matematiksel kavramları sembolleştirebilme, onları farklı bir biçimde sunabilme, onlar arasında ilişki kurabilme ve gerekli işlemleri yapabilme gibi becerilerin oluşturduğu kavramaya dayalı bir bilgidir (Birgin ve Gürbüz, 2009). Kavram bilgisi sadece kavramı tanımak veya kavramın tanımını ve adını bilmek değil, aynı zamanda kavramlar arasındaki karşılıklı geçişleri ve ilişkileri görebilmektir (Baki, 2014). Kavramsal bilgi birey tarafından içsel olarak ve o anda sahip olduğu bilgiye bağlı olarak oluşturulmuş ilişkilerden oluşur (Olkun ve Toluk Uçar, 2009). Matematikte işlemsel ve kavramsal bilgi birbirinden ayrı gibi düşünülse de temelde birbirini tamamlayan bağımlı iki bileşendir (Birgin ve Gürbüz, 2009). Matematiği öğrenme veya matematik yapma, kavramsal bilgi ile işlemsel bilgi arasındaki bağın kurulmasını gerektirir (Baykul, 2014).

Literatür incelendiğinde öğrencilerin analizin temel kavramlarını anlayışlarında karşılaştıkları güçlüklere yönelik çok sayıda araştırmanın yapıldığı görülmüştür (Bezuidenhout, 2001; Davis & Vinner, 1986; Orton, 1983; Tall & Vinner, 1981; Williams, 1991). Yapılan çalışmalarda çoğunlukla, öğrencilerin kavram tanımı ile uyumlu olmayan kavram imajlarına sahip oldukları belirtilmiştir (Tall ve Bakar, 1992; Tall ve Vinner, 1981; Vinner, 1983; Vinner ve Dreyfus, 1989; Williams, 1991). Kavram tanımını bir matematiksel kavramı tanımlamak için ders kitapları ya da ders notlarında kullanılan sembol ya da kelimelerin bir formu olarak tanımlanırken, kavram imajını ise bir kavram ile ilgili bireyin zihninde oluşan tüm bilişsel yapılar olarak ifade edilmiştir (Tall ve Vinner, 1981). Aşağıdaki bölümlerde bu çalışmanın ilgi alanına giren analizin temel kavramlarından olan fonksiyon, diziler, limit, süreklilik ve türev kavramlarına yönelik öğrenci anlayışlarını konu edinen araştırmalar hakkında bilgiler sunulmuştur.

Fonksiyon kavramı matematiğin en temel kavramlarından biri olup analiz çalışmasının temel konusunu oluşturur (Thomas, Weir ve Hass, 2013). Fonksiyon kavramının matematik için önemine rağmen yapılan araştırmalar öğrencilerin fonksiyon ve onunla ilgili kavramların öğrenilmesinde güçlük yaşadıklarını göstermiştir (Abdullah, 2010; Akkoç, 2003; Hatısaru ve Erbaş, 2010; Tall ve Bakar, 1992). Öğrencilerin $f(x)$ sembolünün kullanımı ile ilgili, $f(x)$ görüntüsünün kartezyen koordinatlarda gösterimiyle ilgili ve fonksiyonun formel tanımı ile ilgili güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir (Abdullah, 2010). Bazı araştırmalarda öğrencilerin farklı gösterim şekilleri ile tanımlanan fonksiyonları algılamakta ve bu tarz gösterimlerin fonksiyon olup olmadığını belirlemede sıkıntı çektikleri belirlenmiştir (Akkoç, 2003; Hatısaru ve Erbaş, 2010; Tall ve Bakar, 1992). Bayazıt (2008) öğrencilerin fonksiyon kavramına yönelik zorlukları ve kavram yanılgıları üzerine literatürde yapılan çalışmaları derlemiştir. Öğrencilerin karşılaştıkları zorlukları fonksiyonu birebir eşleme yapan bir bağıntı olarak görme, liste biçiminde yazımlara ilişkin zorluklar, fonksiyon grafiklerine ilişkin zorluklar, cebirsel ifadelere ilişkin zorluklar, kullanılan sembol ve simgelere ilişkin zorluklar, fonksiyonların alt kavramlarına ilişkin zorluklar, fonksiyonların temsilleri arasındaki anlamsal ilişkilere yönelik zorluklar olarak gruplandırmıştır.

Öğrencilerde tespit edilen güçlüklerinin kaynağının araştıran araştırmacılar, bu güçlüklerin fonksiyon tanımının öğrenciler tarafından kavramsal olarak anlaşılamamasından ve kavram tanımı ile uyumlu olmayan kavram imajlarından kaynaklandığını belirtmişlerdir (Akkoç, 2003; Hatısaru ve Erbaş, 2010; Tall ve Bakar, 1992). Ayrıca Tall ve Bakar (1992) öğrencilerin fonksiyonları matematikteki uygulamalarda kullanabiliyor iken fonksiyonun teorik anlamı konusundaki kavrayışlarının çok zayıf ve tutarsız olabileceğini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin fonksiyon kavramını anlayışlarında, fonksiyon tanımının özelliklerinden ziyade prototip örnekler ailesinin özelliklerine güvendiklerini belirtmişlerdir.

Vinner (1983) öğrencilerin fonksiyona yönelik kavram tanımlarının dört ana kategoriye ayrıldığını ifade etmiştir. Bu kategoriler; kavram imajı karışmış ders kitabındaki tanımlar, fonksiyon benzerlik kuralıdır, fonksiyon cebirsel terim, formül, denklem, aritmetik manipülasyondur ve tanım olarak alınmış bazı zihinsel görüntülerdir. Öğrencilerin kavram imajlarının; fonksiyon tek bir kural ile verilir, fonksiyonlar resmi olarak sadece matematikçiler tarafından kabul edilirler, fonksiyonun grafiği akla yatkın olmalı (düzgün, sürekli, devamlı artan ya da azalan vb.), fonksiyon örten olmalı ve fonksiyon birebir olmalı şeklinde olduğunu belirtmiştir. Vinner ve Dreyfus (1989) çalışmasındaki üniversite öğrencileri ve matematik öğretmenlerinin fonksiyon kavramını eşleme (Dirichlet-Bourbaki tanımı), bağımlı ilişki, kural, işlem, formül ve gösterim olarak altı kategori altında tanımladıkları belirlenmiştir. Fonksiyon kavramına yönelik kavram imajlarının ise tek değerlilik, süreksizlik, ayrık tanım kümesi ve istisnai nokta kategorileri altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Tek değerlilik kategorisinde eğer tanım kümesindeki her elaman sadece bir değer ile eşleniyorsa fonksiyondur, değilse fonksiyon değildir. Süreksizlik kategorisinde grafik bir boşluğa sahiptir. Eşleme, tanım kümesindeki bir noktada süreksizdir. Ayrık tanım kümesi kategorisinde eşlemenin tanım kümesi alt tanım kümelerine ayrılır. Her alt tanım kümesi için eşleme kuralı değişir. Yani eşlemenin grafiğinin karakteri bir alt kümeden diğerine değişebilir. İstisnai nokta kategorisinde verilen bir eşlemede istisnai noktalar vardır. Bir nokta eşlemenin genel kuralına uymaz.

Diziler sonsuz serilerin ve birçok matematiksel uygulamanın analizinde önemli rol oynarlar (Thomas, Weir ve Hass, 2013). Belli bir kurala göre değişimin ele alındığı problemler dizi kavramı içerisinde ele alınmaktadır (Bozkurt, 2013). Literatür incelendiğinde lisans öğrencilerinin dizi ve onunla ilgili kavramları anlayışlarına yönelik yapılan çalışmaların oldukça sınırlı olduğu tespit edilmiştir. Yapılan çalışmalar daha çok öğrencilerin yakınsak dizi kavramını anlamalarına ve sahip oldukları imajlara yöneliktir. Çalışmaların sonuçları öğrencilerin yakınsak dizi tanımını anlamada ve doğru bir kavram imajı geliştirmede güçlük yaşadıkları yönündedir (Doruk ve Kaplan, 2015; Mamona-Downs, 2001; Roh, 2008). Roh'un (2008) çalışmasındaki öğrenciler, dizinin terimlerinin limit noktasını asla geçemeyeceğini (asimptot), dizinin yığılma notalarının limitleri olduğunu (yığılma noktası) ve dizinin terimlerinin limit noktasına yaklaştığını ya da limit değerini alabileceğini ve limit değerinin tek olması gerektiğini (gerçek limit noktası) belirtmişlerdir. Çalışmada bazı öğrencilerin yakınsak dizi tanımını anlamada ve doğru yakınsak dizi tanımını belirlemede güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Mamona-Downs (2001) da yaptığı çalışmada öğrencilerin çok azının yakınsak dizinin formel tanımını tam anlamıyla kavrayabildiğini ifade etmiştir. Öğrencilerin çoğunun tanımı anlamakta zorlandıkları dile getirilmiştir. Öğrencilerin tanımda yer alan ve bazı pozitif tamsayıları temsil eden n_0 kesme noktasının işlevini anlamakta güçlük yaşadıklarını ifade etmiştir. Benzer şekilde Doruk ve Kaplan (2015) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının yakınsak dizi tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin oldukça düşük seviyede olduğunu tespit etmişlerdir. Özellikle öğrencilerin çoğunun, tanımda yer alan n_0 teriminin işlevini bilmedikleri ortaya çıkmıştır.

Analiz denilince akla dört temel kavram gelmektedir. Bunlar; limit, süreklilik, türev ve integraldir. Ancak bu kavramlar arasından en temel nitelikte olan kavram limittir. Çünkü diğer üç kavram limit yardımıyla tanımlanmaktadır (Arslan ve Çelik, 2013). Buradan hareketle, analizin bu temel kavramlarını anlayabilmek için öncelikle limit kavramına yönelik doğru anlayışların geliştirilmesinin gerektiğini söylemek mümkündür. Yapılan literatür incelemesi sonucunda, öğrencilerin analizin önemli kavramlarından olan limit ve limit kavramı ile doğrudan ilişkili olan süreklilik kavramını anlamada güçlük çektikleri belirlenmiştir (Akbulut ve Işık, 2005; Barak, 2007; Baştürk ve Dönmez, 2011; Bezuidenhout, 2001; Jordaan, 2005). Yapılan araştırmalar öğrenciler arasında limit kavramının tam olarak anlaşılmasının çok nadir bir durum olduğunu ortaya çıkarmıştır (Tall ve Vinner, 1981; Williams, 1991).

Williams (1991) çalışmasında 341 üniversite öğrencisine limit kavramına yönelik sahip oldukları modelleri belirlemek için anket uygulamıştır. Ankette öğrencilerin limit tanımına yönelik altı farklı modelde oldukları ortaya çıkmıştır. Bu modeller; x bir noktaya gittikçe fonksiyonun nasıl hareket edeceği (dinamik-teorik), limit bir sayı ya da noktadır, fonksiyon onu geçemez (sınır), x değerlerinin sınırlandırılmasıyla fonksiyonun y değerlerinin rastgele limit değerine yaklaşması (formel), limit bir nokta ya da değerdir, fonksiyon ona yaklaşır fakat asla ulaşamaz (ulaşılmaz), limit istenildiği kadar kesin yapılabilecek bir yaklaşmadır (yaklaşma) ve limit verilen bir sayıya yakın değerler verilerek belirlenir (dinamik-pratik) modelleridir. Tall ve Vinner (1981) üniversite matematik öğrencilerin süreklilik için genellikle fonksiyonun grafiğinde kopukluk olmamasını algıladıklarını ve bu durumun çelişkiye düşme potansiyeli olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin çoğunun sürekli fonksiyonun tek bir formül ile ifade edilebileceğini ve grafiğinin tek parçadan oluşması gerektiğini belirtmişlerdir. Bezuidenhout (2001) birinci sınıf üniversite öğrencilerinin analizin temel kavramlarından olan limit, süreklilik ve türev kavramlarını anlamaları üzerine araştırma yapmıştır. Çalışmasında öğrencilerin limit, süreklilik ve türev kavramlarına yönelik birçok kavram yanılgısına sahip olduğunu ortaya çıkarmıştır. Örneğin, öğrencilerin bir kısmı fonksiyonun bir noktada limiti var ise süreklidir, bir fonksiyonun limiti o noktadaki değeridir, fonksiyon limitinin mevcut olduğu noktada türevlidir, fonksiyon bir noktada sürekli ise türevlidir ve fonksiyon bir noktada sürekli ve limiti var ise türevlidir gibi kavram yanılgılarının mevcut olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Matematikteki temel öğrenme alanlarından olan Analiz ile amaçlanan büyük hedeflere ulaşmada kullanılan en önemli yapı taşı, analiz alanının temel kavramlarından olan türevdir (Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013). Bu nedenle öğrencilerin, limit ve fonksiyon kavramlarını içinde barındıran türev kavramını nasıl anladıkları araştırmacıların ilgisini çeken analiz konularından biri olmuştur. Analiz öğrencilerinin türev kavramına yönelik anlayışlarını inceleyen çalışmalarda öğrencilerin türevi kavramsal olarak anlayamadıkları, türeve yönelik çeşitli güçlüklere ve kavram yanılgılarına sahip oldukları, ayrıca türeve yönelik sınırlı ve uygun olmayan kavram imajları geliştirdikleri ortaya çıkmıştır (Açıkyıldız, 2013; Duru, 2006; Habre ve Abboud, 2006). Örneğin Habre ve Abboud (2006), Analiz-I dersine katılan öğrencilerin fonksiyon ve türev kavramlarını anlama düzeylerini belirlemeye yönelik bir araştırma yapmışlardır. Öğrencilerin çoğunun türevin formel tanımını ifade etmede ve kullanmada başarısız olduklarını belirtmişlerdir. Bu öğrencilerin bir kısmının da türevi bulmak için mekanik metotları kullandıkları belirlenmiştir.

Literatür incelendiğinde öğrencilerin kavramsal olarak anlamakta zorlandıkları formel tanımlara odaklanarak öğrencilerin anlayışlarını inceleyen çalışmaların oldukça sınırlı olduğu tespit edilmiştir. Araştırmacılar öğrencilerin formel tanımlara yönelik muhtemel karşılaşılabilecek zorluklara yönelik tahminde bulunulurken, öğrencilerin formel tanımları anlayışlarını yansıtan çok az sayıda çalışma yapmışlardır (Swinyard, 2011). Bu anlamda öğrencilerin formel tanımları nasıl anladıkları ve ne tür güçlükler yaşadıklarına odaklanan çalışmalara ihtiyaç olduğu söylenebilir. Bu çalışmaların sonucunda elde edilecek bilgilerle analiz öğretiminden sorumlu öğretim elemanları, belki de farkında olmadıkları güçlükler hakkında bilgi sahibi olacaklardır. Bu çalışmada böyle bir çabanın ürünüdür. Çalışmada aşağıdaki soruların cevapları aranmıştır.

1. Öğretmen adaylarının fonksiyon, birebir fonksiyon ve örten fonksiyon tanımlarına yönelik anlayışları nasıldır?
2. Öğretmen adayları yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımlarını nasıl anlamaktadırlar?
3. Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik tanımlarını anlayışları nasıldır?
4. Öğretmen adaylarınca türev tanımı nasıl anlaşılmaktadır?

YÖNTEM

Araştırmanın modeli

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiş olup bir durum çalışması örneğidir. Durum çalışmalarında araştırılan olay ya da durum kendi doğal kapsamında yer ve zamanla sınırlı olarak araştırılır (Kaleli Yılmaz, 2015). Diğer bir deyişle, sınırlı bir sistemin derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesidir (Merriam, 2013). Bu çalışmada da öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki tanımlara yönelik anlayışları ortaya çıkarılmak istenmiştir.

Araştırma grubu

Bu çalışmanın katılımcılarını 2013-2014 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında, Doğu Anadolu Bölgesi'nde yer alan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü sınıfında öğrenim gören toplam sekiz matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Ayrıca çalışmanın pilot uygulaması 2013-2014 eğitim öğretim yılının güz yarıyılında, yine aynı üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün son sınıfında öğrenim gören toplam 10 öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

Araştırma grubunun seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi dikkate alınmıştır. Ölçüt örnekleme yönteminde temel anlayış önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan durumların çalışılmasıdır. Burada sözü edilen ölçüt veya ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir ya da daha önceden hazırlanmış bir ölçüt listesi kullanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Ölçüt örneklemenin mantığı da, daha önceden belirlenmiş bazı önem ölçütlerini karşılayan tüm durumları çalışma ve gözden geçirmedir (Patton, 2014). Çalışmada öğretmen adaylarının analiz alanındaki bazı temel formel tanımları ne ölçüde içselleştirdikleri araştırılmak istenmiştir. Analizin temel konuları olarak fonksiyonlar, diziler, limit, süreklilik ve türev kavramları dikkate alınmıştır. Çalışmada analizin temel konularından biri olan integral kavramı kullanılmamıştır. İntegral kavramının formel tanımına doğrudan ulaşılamadığı, daha kompleks bir yapıya sahip olduğu için çalışmada kullanılması uygun bulunmamıştır. Örneğin kapalı bir aralıkta tanımlanan reel değerli ve reel değişkenli bir fonksiyonun integrallenebilmesinden söz edebilmek için parçalanma, parçalanmanın normu, alt ve üst Darboux toplamları ve Riemann toplamı gibi kavramların tanımlarına ihtiyaç vardır.

İlköğretim matematik öğretmenliği bölümünde söz konusu kavramların öğretimi Analiz I ve Analiz III dersi kapsamında yapılmaktadır. Dolayısıyla çalışmanın katılımcıların bu konularının öğretiminin yapıldığı ilgili dersleri almış ve başarı ile geçmiş olması kriter olarak alınmıştır. Bu kriterleri sağlayan öğrencilerin ağırlıklı genel not ortalamaları (AGNO) incelenmiş ve iki farklı başarı düzeyinde toplam sekiz öğretmen adayı ile çalışılmıştır. İlk grup ortalama başarı düzeyindeki öğretmen adaylarıdır. Bu grup, AGNO'ları 4 üzerinden 2.5 ile 3.0 arasında değişen dört öğretmen adayından oluşmaktadır. İkinci gruptaki öğretmen adayları ise başarı düzeyi yüksek öğretmen adaylarıdır. Bu grubu oluşturan dört öğretmen adayının AGNO'ları 4 üzerinden 3.0 ile 4.0 arasında değişmektedir.

Çalışmada başarı düzeyi farklı iki grubun incelenmesinin sebebi farklı görüşlerin elde edilmesini sağlamaktır. Bu sayede öğretmen adaylarından araştırılan konuya yönelik çeşitli ve derinlemesine bilgi alınabileceği düşünülmüştür. Amaçlı örneklem seçiminde de mantık, araştırmanın daha derinlemesine yapılabilmesi için bilgi açısından zengin durumları seçmektir. Bilgi açısından zengin durumlar, araştırmacının araştırmanın amacı açısından mümkün olduğunca fazla bilgi elde edebileceği durumlardır. Bilgi açısından zengin durumları çalışma, ampirik genellemelerden ziyade derinlemesine anlama imkânı sağlar (Patton, 2014). Ayrıca amaçlı örnekleme yöntemiyle katılımcı seçmek, ayrıntılı betimlemeyle beraber nitel çalışmaların aktarılabilirliğini (dış geçerlik) önemli ölçüde artırmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Çalışmada başarı düzeyi düşük öğrencilerin araştırmaya dâhil edilmemesinin sebeplerinden biri de pilot uygulamada bu tarz öğrencilerin analizi kolay olmayan ifadeler kullanma eğiliminde olmalarıdır.

Pilot uygulama 10 son sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Pilot uygulamadan sonra elde edilen veriler analiz edilmiş ve ortaya çıkan sonuçlar altı uzman akademisyene sunulmuştur. Sunum sırasında ve sonunda veri toplama aracı ve bulgular tartışılmıştır. Uzmanlar veri toplama aracının ve

yöntemin uygun olduğunu belirtmişlerdir. Uzmanlar katılımcı sayısının fazla olduğunu, bu nitel araştırmadaki derinliğin sağlanabilmesi için katılımcı sayısının düşürülmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. Pilot uygulama sonucunda veri toplama aracının ve yöntemin bir değerlendirilmesi yapılmış ve katılımcı sayısı düşürülmüştür. Araştırma grubu olarak dördüncü sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının seçilmemesinin sebebi ise öğretmen adaylarından kaynaklanan dışsal faktörlerin (gelecek kaygısı, KPSS vb.) araştırma sürecini olumsuz yönde etkileme olasılığının üçüncü sınıftaki öğretmen adaylarına göre daha fazla olmasıdır. Bu durum dördüncü sınıf öğrencileri ile yapılan pilot çalışmada açık bir şekilde görülmüştür. Öğrencilerin üniversitedeki dersleri, KPSS kursları ve deneme sınavları nedeniyle pilot çalışmaya zaman ayırmakta zorlanmışlardır.
Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının gerçek isimlerinin yerine takma isimler kullanılmıştır. İlk grup olan ortalama düzeyde akademik başarıya sahip öğretmen adaylarının takma isimleri başarı sırasına göre Barış, Belma, Bilge ve Buse'dir. Başarı düzeyi yüksek öğretmen adaylarının takma isimleri başarı sırasına göre Adem, Ahu, Aysun ve Aziz'dir

Veri toplama aracı

Öğretmen adaylarının analizin temel tanımlarına yönelik anlayışlarını ortaya çıkarmak için yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerden yararlanılmıştır. Öğretmen adayları ile dört kez görüşülmüştür. Her görüşmede öğretmen adaylarına ilgili konudaki formel tanımlar sıra ile sunulmuş ve öğrencilerin bu tanımları ne ölçüde içselleştirdikleri sorgulanmıştır. İlk görüşme formu fonksiyon konusu ile ilgilidir. Öğretmen adaylarına fonksiyon, birebir fonksiyon ve örten fonksiyon tanımları sunulmuştur. İkinci görüşme diziler konusu hakkındadır. Bu formda dizi, yakınsak dizi ve Cauchy dizisinin tanımları yer almıştır. Üçüncü görüşme limit ve süreklilik kavramlarına yöneliktir. Öğretmen adaylarına limit ve süreklilik kavramlarının formel tanımları sunulmuştur. Son görüşmede türev kavramı üzerine yoğunlaşılmıştır. İlgili formda türev kavramının cebirsel tanımı yer almıştır. Analizin temel tanımları fonksiyonlar, diziler, limit, süreklilik ve türev konuları ile sınırlandırılmıştır.
Veri toplama araçlarının geliştirilmesinde geçerlik çalışmaları kapsamında altı uzman akademisyenin görüşüne başvurulmuş ve pilot uygulama yapılmıştır. Bu uzmanlar bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik ve ortaöğretim fen ve matematik alanları eğitimi alanında doçent ve yardımcı doçent olarak görev yapmaktadırlar. Uzmanlardan alınan görüşler doğrultusunda formda bulunan yazım hataları ve matematiksel hatalar düzeltilmiştir. Örneğin veri toplama aracında bulunan reel sayı dizisi tanımında, fonksiyonunun tanım kümesi doğal sayılar kümesi iken tanım kümesi N={1,2,3,...} olarak düzeltilmiştir. Ayrıca nokta, küme ve fonksiyon belirten harflerin italik olarak yazılmasının daha uygun olacağına karar verilmiştir. Tablo 1'de çalışmada yer alan formel tanımlar sunulmuştur.

Tablo 1
Çalışmada Kullanılan Formel Tanımlar

Konular	***Tanımlar***
Fonksiyonlar	*A ve B boştan farklı iki küme olsun.* $f \subset AxB$ *aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu* f *bağıntısına fonksiyon denir:* *i.* $\forall a \in A$ *için öyle bir* $b \in B$ *vardır ki* $(a,b) \in f$ *dir.* *ii.* $(a,b_1) \in f$ *ve* $(a,b_2) \in f$ *ise* $b_1 = b_2$ *dir.* $f: A \rightarrow B$ *bir fonksiyon olsun. Eğer her* $x_1, x_2 \in A$ *için* $f(x_1) = f(x_2)$ *iken* $x_1 = x_2$ *oluyorsa* f *fonksiyonuna birebir fonksiyon denir. Bu tanım şu şekilde de verilebilir; her* $x_1, x_2 \in A$ *için* $x_1 \neq x_2$ *iken* $f(x_1) \neq f(x_2)$*oluyorsa* f *fonksiyonuna birebir fonksiyon denir.* $f: A \rightarrow B$ *bir fonksiyon olsun.* $f(A) = B$ *oluyorsa f fonksiyonuna örten (veya üzerine) fonksiyon denir. Buna göre f örtense her* $y \in B$ *için* $f(x) = y$ *olacak şekilde en az bir* $x \in A$ *vardır.*
Diziler	*N={1,2,3,...} olmak üzere,* $s: N \rightarrow R$ *şeklinde tanımlanan fonksiyona reel sayı dizisi denir.* (s_n) *bir reel sayı dizisi ve* $s \in R$ *olsun.* $\forall \varepsilon > 0$ *için* $n > n_0$ *olduğunda* $\lvert s_n - s \rvert < \varepsilon$ *kalacak şekilde ε a bağlı bir* n_0 *sayısı bulunabiliyorsa* (s_n) *dizisi s ye yakınsaktır denir. Yakınsak olmayan diziye ıraksak dizi denir.* (s_n) *reel terimli bir dizi olsun.* $\forall \varepsilon > 0$ *için* $m, n > n_0$ *olduğunda* $\lvert s_m - s_n \rvert < \varepsilon$ *kalacak şekilde ε a bağlı bir* n_0 *sayısı bulunabiliyorsa* (s_n) *dizisine Cauchy dizisi denir.*
Limit ve süreklilik	$A \subset R$, $f: A \rightarrow R$ *bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her* $\varepsilon > 0$ *için, eğer* $0 < \lvert x - a \rvert < \delta$ *olduğunda* $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$ *kalacak şekilde bir* $\delta > 0$ *sayısı bulunabiliyorsa x, a noktasına yaklaştığında* f *fonksiyonunun limiti L dir denir.* $A \subset R$, $f: A \rightarrow R$ *bir fonksiyon ve* $a \in A$ *olsun. Her* $\varepsilon > 0$ *için, eğer* $\lvert x - a \rvert < \delta$ *olduğunda* $\lvert f(x) - f(a) \rvert < \varepsilon$ *kalacak şekilde bir* $\delta > 0$ *sayısı bulunabiliyorsa* f

	fonksiyonu a noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonu A üzerinde süreklidir denir.
Türev	$A \subset R$, $a \in A$ *ve a, A kümesinin bir yığılma noktası olsun.* $f: A \to R$ *fonksiyonu için* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *limiti mevcut ise bu limite f nin a noktasındaki türevi denir. f a noktasında türevli ise f a da diferensiyellenebilirdir denir.*

Verilerin toplanması

Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler yardımıyla dört haftada toplanmıştır. Öğretmen adaylarına görüşmelere başlamadan önce çalışma hakkında gerekli bilgiler verilmiştir. Çalışmanın gönüllülük esasına göre yürütüleceği ve istedikleri zaman çalışmadan ayrılabilecekleri ifade edilmiştir. Öğretmen adaylarının isimlerinin gizli tutulacağı ve takma isimlerin kullanılacağı belirtilmiştir. Çalışmanın video kaydı altına alınması planlanmış fakat pilot uygulamadan elde edilen bilgiler doğrultusunda, öğretmen adaylarının bu durumdan tedirgin olacakları ve dikkatlerini çalışmaya veremeyecekleri düşüncesiyle çalışma ses kaydı altına alınmıştır.

Görüşmeler araştırmacı ile öğretmen adaylarının dışsal faktörlerden etkilenmeyeceğine inanılan bir ortamda gerçekleşmiştir. Öğretmen adaylarından görüşmeler sırasında sesli düşünmeleri rica edilmiştir. Öğretmen adayları da genellikle düşüncelerini sesli olarak ifade etmişlerdir. Görüşmeler sırasında araştırmacı, öğretmen adaylarını yönlendirici davranışlardan kaçınmaya çalışmıştır. Öğretmen adaylarının düşüncelerini anlamak için sıklıkla sorular sorulmuştur. Görüşmelere başlamadan önce araştırmacı tarafından sorulacak olan soruların onların ne düşündüklerini anlamak için olduğu, kesinlikle yönlendirici bir nitelik taşımadığı belirtilmiştir. Öğretmen adaylarına da araştırmacıdan bir onay beklememeleri ve buna yönelik soru sormamaları istenmiştir.

Verilerin analizi

Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden elde edilen verilerin çözümlenmesinde içerik analizi kullanılmıştır. Nitel verilerin analizinde genellikle içerik analizi yapılmakta ve toplanan verilerin düzenlenmesi, özetlenmesi ve yorumlanması analizin temel süreçleri arasında yer almaktadır (Büyüköztürk vd., 2012). İçerik analizi toplanan verilerin derinlemesine analiz edilmesini gerektirir ve önceden belirgin olmayan temaların ve boyutların ortaya çıkarılmasına olanak tanır (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

Çalışmada ilk olarak ses kayıtları yazıya dökülmüştür. Veriler yazıya dökülürken anlaşılamayan ve ifadelerden çıkartılan yorumlar için öğretmen adaylarıyla görüşülerek anlaşılmayan ifadeler aydınlatılmış ve ifadelerden çıkartılan yorumlardan onay alınmıştır. Görüşme verilerinin yazıya dökülmesi işleminin ardından araştırmacı tarafından ham verilerden kod ve kategoriler oluşturulmuştur. Öğretmen adayları ile araştırmacı aralarında geçen diyaloglar sıklıkla üzerinde değişiklik yapılmadan, betimsel olarak sunulmaya çalışılmıştır. Bu sayede araştırma verilerinin güvenilirliğinin artırılması hedeflenmiştir. Çalışmada elde edilen kategoriler iki uzman akademisyenin kontrolünden geçmiştir. Uzman akademisyenler çalışmada ortaya çıkan kategorilerin öğretmen adaylarının görüşlerini yansıttığı yönünde görüş bildirmişlerdir.

Öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki tanımlara yönelik anlayışlarının belirlenmesinde detaylı bir çalışma yürütülmüştür. Öncelikle, öğretmen adaylarına fonksiyonlar, diziler, limit, süreklilik ve türev konularındaki formel tanımlar yazılı olarak verilmiştir. Kendilerine verilen tanımlardan ne anladıklarını ifade etmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarından tanımları açıklamaları esnasında, gerekli görüldüğü durumlarda, ek açıklama yapmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının tanımın tümü üzerinde yaptığı açıklamaları bitince tanımı irdeleme bölümüne geçilmiştir. Tanımda yer alan önemli noktaların anlamı ve birbiri ile olan ilişkileri sorgulanmıştır. İhtiyaç hissedildiği durumlarda öğretmen adayından ilgili duruma yönelik çizim yapmaları ya da örnek vermeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının tanımlara yönelik anlayışlarına tüm delillerin bütüncül bir şekilde değerlendirilmesinden sonra karar verilmiştir.

Örneğin limit tanımına yönelik anlayışın ortaya çıkarılmasında, ilk olarak öğretmen adayının tanımın bütünü üzerindeki düşünceleri detaylı olarak sorgulanmıştır. Öğretmen adayının tanımı doğru bir şekilde açıklaması, onun bu tanımı kavramsal olarak anladığına karar vermek için yeterli olmamıştır. Daha sonra tanımda yer alan sembollerin (epsilon-delta) özellikleri, işlevi ve aralarındaki ilişki ile tanımda yer alan topolojik kavramların (komşuluk ve delik komşuluk) anlamları üzerine öğretmen adaylarından açıklama yapmaları istenmiştir. Gerekli görüldüğünde öğretmen adayından ifade ettiği konu ile ilgili örnek vermeleri söylenmiştir. Elde edilen tüm bulgular bütüncül bir şekilde değerlendirilerek öğretmen adaylarının anlayışı üzerine bir değerlendirmede bulunulmuştur. Eğer öğretmen adayı limit tanımını doğru bir şekilde ifade edebilmiş, tanım içerisindeki kavramları ve kavramların birbiri arasındaki ilişkilerini açıklayabilmiş ise öğretmen adayının tanıma yönelik anlayışının kavramsal bilgi düzeyinde olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Diğer taraftan, öğretmen adayı limitin formel tanımını kendi cümleleri ile ifade etmekte zorlandığında da onun tanım anlayışı üzerinde bir karara varılmamıştır. Benzer şekilde, tanım içerisindeki önemli kavramlar hakkındaki bilgileri sorgulanarak sahip olduğu anlayış hakkında ikna olunmaya çalışılmıştır. Yani öğretmen adayının tanımı anlayışı üzerine

yapılan değerlendirme onun sadece tanımı kendi cümleleri ile doğru bir şekilde ifade edip edememesine göre verilen karar olmamıştır. Bu yöntemle öğrencinin ezbere bildiği bir tanımla kavramsal anlama düzeyinde değerlendirilme ihtimalinin ortadan kalkacağı düşünülmüştür.
Yapılan analizler sonucunda öğretmen adaylarının tanımlara yönelik anlayışlarının dört kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Bu kategoriler sembolik anlama, hatalı anlama, kavram karmaşası ve kavramsal anlama kategorileridir. Bu kategorilere ait bilgiler Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2
Öğretmen Adaylarının Analizin Temel Tanımlarını Anlayış Şekilleri

Anlayışlar	*Göstergeler*
Sembolik anlama	*Öğretmen adayları kendilerine formel bir şekilde verilen tanımı kendi cümleleri ile ifade edemezler. Tanımda bulunan ifadeleri tekrarlarlar. Bu öğretmen adaylarında söz konusu tanıma yönelik bir kavramsal anlama belirtisi bulunmamaktadır.*
Hatalı anlama	*Bu anlayışa sahip öğretmen adayları kendilerine formel bir şekilde verilen tanımı, kendi cümleleri ifade etmelerine rağmen açıklamalarında eksiklikler ve hatalar mevcuttur. Bu kategorideki öğretmen adayları, tanımların altında yatan sezgisel anlamaları doğru bir şekilde ifade edememektedirler.*
Kavram karmaşası	*Öğretmen adayları tanımları kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışmaktadırlar. Öğretmen adaylarının açıklamalarına bakıldığında, hatalı anlayışa sahip öğretmen adayları gibi tanımları doğru bir şekilde açıklayamadığı görülmüştür. Hatalı anlayışa sahip olan öğretmen adaylarından farklı olarak, bu öğretmen adaylarının açıklamalarında söz konusu tanıma ait değil de, farklı tanımlara ait ifadeler göze çarpmaktadır. Öğretmen adaylarının ifadelerinden farklı bir kavramın tarif edildiği hissi uyanmaktadır. Öğretmen adaylarının söz konusu tanımı başka tanımlar ile karıştırdığı ya da yapılan açıklamaların farklı kavramları çağrıştırdığı söylenebilir.*
Kavramsal anlama	*Öğretmen adayları tanımları kendi cümleleri ile ve matematiksel olarak doğru bir şekilde ifade edebilmektedirler. Öğretmen adaylarının ifadelerinden, tanımların altında yatan sezgisel anlamaların farkında oldukları göze çarpmaktadır. Bu kategorideki öğretmen adaylarının söz konusu tanımlara yönelik kavramsal anlamaya sahip olduklarını söylemek mümkündür.*

BULGULAR VE YORUM

Öğretmen Adaylarının Fonksiyon, Birebir fonksiyon ve Örten Fonksiyon Tanımlarını Anlayışları

Bu bölümde fonksiyon, birebir fonksiyon ve örten fonksiyon tanımları öğretmen adaylarına sunulmuştur. Öğretmen adaylarından bu tanımları sesli bir şekilde okumaları rica edilmiştir. Tanımların okunmasının ardından tanımlardan ne anladıklarını kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Öğretmen adayları tarafından ilgili tanımların ne ölçüde içselleştirildiği ve bu tanımları anlayış şekilleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.
Öğretmen adaylarının fonksiyon tanımına yönelik anlayışlarının beş kod ve üç kategori altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Tablo 3'te bu kod ve kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 3
Öğretmen Adaylarının Fonksiyon Tanımına Yönelik İfadeleri

Kategori	Kod	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Kavramsal anlama	Tanım kümesinde her elemanın bir karşılığının olması ve bir ve yalnız bir elemana gitmesi	Aziz Ahu Aysun Adem	*Ahu: Yani tanım kümesinin her elemanının değer kümesinde karşılığı olacak. Tanım kümesinde boşta eleman kalmayacak. Bir de tanım kümesindeki bir tek elemanın görüntüsü tek olacak yani bir eleman iki yere gidemez.*
	Tanım kümesindeki her bir elemanın	Bilge	*Bilge: Tanım kümesinden alınan her eleman, değer kümesinden sadece bir elemana gidecek.*

	değer kümesinde sadece bir elemana gitmesi		*Birincisi, her elemana karşı gelecek bir eleman vardır diyor. A tanım kümesinden alınan her eleman B de bir elemana gider. B de karşıtı olan bir eleman olmalıdır diyor tanım.*
	Tanım kümesindeki herhangi bir elemanın değer kümesindeki bir ve yalnız bir eleman ile eşleşmesi	Barış	*Barış: Mesela fonksiyon olması için tanım kümesindeki herhangi bir eleman değer kümesindeki bir ve yalnız bir eleman ile eşleşiyorsa fonksiyon oluyor.*
Hatalı anlama	Tanım kümesinden alınan bir elemanın değer kümesinde bir değerinin olması	Buse	*Buse: Mesela x ve y gibi iki tane elemanımız olsun. Bu aldığımız elemanlar, tanım kümesinden aldığımız bir eleman değer kümesinden bir elemana karşılık geliyorsa fonksiyon oluşturur.*
Kavram karmaşası	Bağıntının birebir ve örten olması	Belma	*Belma: Elimizde iki küme var. A dan seçtiğimiz elemanı B de tanımlıyoruz... Fonksiyonu tanımlayabilmemiz için bağıntıyı bilmemiz gerek. Bağıntıyı bildiğimizi kabul ederek, AxB kümesinde tanımlı olan bağıntı birebir ve örten ise bağıntı, fonksiyondur.*

Tablo 3 incelendiğinde, öğretmen adaylarının çoğunun (Belma ve Buse hariç) yaptıkları tanımlarda bir bağıntının fonksiyon olma şartlarından ilki olan, tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde karşılığının bulunması ve ikincisi olan, tanım kümesindeki her elemanın görüntüsünün tek olması özelliklerini barındırdığı tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının fonksiyon tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin yeterli düzeyde olduğu söylenebilir. Buse ise bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için tanım kümesinden alınan bir elemanın görüntü kümesinde bir karşılığının bulunmasının yeterli olduğunu ifade etmiştir. Buse'nin tanımında söz konusu durumun tanım kümesinde bulunan tüm elemanlar için gerekli olduğu ve görüntülerinin tek olması ifade edilmemiştir. Bu bakımdan Buse'nin yapmış olduğu tanımda eksiklerin olduğu söylenebilir. Buna göre Buse'nin söz konusu tanıma yönelik kavramsal bilgilerinde eksikliklerin olduğunu ve hatalı anlamalarının mevcut olduğunu söylemek mümkündür. Son olarak Belma, bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için, bağıntının birebir ve örten olması gerektiğini ifade etmiştir. Belma bu düşüncesini savunmuştur. Belma, fonksiyon tanımında yer alan "$\forall a \in A$ için öyle bir $b \in B$ vardır ki $(a,b) \in f$'dir" şartının birebirliğe işaret ettiğini, "$(a,b_1) \in f$ ve $(a,b_2) \in f$ ise $b_1 = b_2$'dir" şartının da örtenliğe işaret ettiğini iddia etmiştir. Buna göre Belma'nın fonksiyon tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal bilgi düzeyinde olmadığı söylenebilir. Ayrıca Belma'nın bağıntı kavramına yönelik bilgilerinde de eksikliklerin olduğu belirlenmiştir. Çünkü birebirlik ve örtenlik bağıntılara değil fonksiyonlara has bir özelliktir. Bu nedenle Belma'nın fonksiyon tanımı anlayışında bağıntı, birebir fonksiyon ve örten fonksiyon kavramlarının yer aldığı söylenebilir.

Öğretmen adaylarının fonksiyon tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin sorgulanmasının ardından birebir ve örten fonksiyon tanımlarına yönelik kavramsal bilgileri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının birebir fonksiyon tanımına yönelik ifadelerinin dört kod ve üç kategori altında toplandığı, örten fonksiyon tanımına yönelik ifadelerinin ise tek kod ve kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4'te kod ve kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4
Öğretmen Adaylarının Birebir ve Örten Fonksiyon Tanımlarına Yönelik İfadeleri

Kategori	Kod	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Kavramsal anlama	Görüntüleri eşit iken elemanlar eşit ya da elemanlar farklı iken görüntüleri farklı	Ahu Aysun Adem Aziz	*Aysun: Bir fonksiyonun görüntüleri birbirine eşit ise değerleri de eşittir. Aynı şekilde değerleri farklı ise görüntüleri de farklıdır.*
Hatalı anlama	Elemanlar eşit iken görüntüler de eşit ya da elemanlar farklı iken görüntüler de farklı	Barış Belma	*Barış: Birebir fonksiyonda aldığımız herhangi iki eleman eşit oluyorsa ve bunları görüntü kümesine yazdığımızda*

			sonuç da eşit oluyorsa birebirdir. Ve iki tane farklı eleman aldığımızda görüntü kümesine yazdığımız zaman sonuçlarda birbirinden farklı oluyorsa birebir olur.
Kavram karmaşası	Tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde bir ve yalnız bir eleman ile eşleşir.	Buse	*Buse: Tanım kümesindeki her eleman değer kümesindeki bir ve yalnız bir eleman ile eşleşiyorsa birebirdir.*
	Tanım kümesindeki bir eleman değer kümesindeki sadece bir eleman ile eşleşir.	Bilge	*Bilge: Bir fonksiyonun birebir olması, kendi cümlelerim ile ifade edeyim. Tanım kümesindeki bir eleman değer kümesindeki bir eleman ile eşleneceği ve ikinci bir elemana gitmeyeceğini anlıyorum.* $x_1 = x_2$ *iken* $f(x_1) = f(x_2)$ *yani.*
Kavramsal anlama (Örten fonksiyon)	Fonksiyonun değer kümesinde açıkta eleman kalmayacak	Tüm öğretmen adayları	*Adem: B değer kümesinden her elemanı seçtiğimiz zaman, B nin her b elemanı için, görüntüsü b ye eşit olan bir eleman vardır. Yani değer kümesinde açıkta eleman kalmayacak.*

Tablo 4 incelendiğinde Ahu, Aysun, Adem ve Aziz'in birebir fonksiyon tanımlarının "Bir fonksiyonun görüntüleri birbirine eşit iken tanım kümesindeki elemanlar da eşittir ya da fonksiyonun tanım kümesindeki elemanlar farklı iken görüntüleri de farklıdır." şeklinde olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının yaptıkları bu tanımlamanın birebir fonksiyon kavramının mantığı ile örtüştüğü belirlenmiştir. Buna göre bu öğretmen adaylarının birebir fonksiyon tanımını içselleştirdikleri söylenebilir. Bu bakımdan, öğretmen adaylarının birebir fonksiyon tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin yeterli düzeyde olduğu ve kavramsal anlamaya sahip oldukları ortaya çıkmıştır.

Barış ve Belma'nın birebir fonksiyon tanımına yönelik ifadeleri incelendiğinde, tanımda bulunan bileşik önermeleri anlama konusunda sıkıntı yaşadıkları görülmüştür. Bu öğretmen adayları tanımda bulunan önermenin hipotezi ve hükmünü birbiri yerine kullanmışlardır. Barış ve Belma, fonksiyonun tanım kümesindeki elemanlar eşit iken görüntüleri de eşit ise fonksiyonun birebir olacağını ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının ifadeleri birebir fonksiyon tanımında yer alan "$f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$" ya da bu önermenin karşıt tersi olup, dengi olan "$x_1 \neq x_2$ ise $f(x_1) \neq f(x_2)$" önermelerinin ifade ettiği matematiksel gerçeklerle uyuşmamaktadır. Bu bağlamda Barış ve Belma'nın birebir fonksiyon tanımına yönelik hatalı anlamaya sahip oldukları tespit edilmiştir.

Buse bir fonksiyonun birebir olması için tanım kümesindeki her elemanın değer kümesindeki bir ve yalnız bir eleman ile eşleşmesi gerektiğini vurgulamıştır. Buse'nin ifadelerinden, birebir fonksiyon tanımı ile fonksiyon tanımını birbiri ile karıştırdığı söylenebilir. Bilge de Buse ile benzer olarak bir fonksiyona birebir fonksiyon diyebilmek için tanım kümesindeki bir elemanın değer kümesindeki sadece bir eleman ile eşleşebileceğini ifade etmiştir. Buna göre Bilge ve Buse'nin kavramları birbiri ile karıştırdığı ortaya çıkmıştır.

Öğretmen adaylarının örten fonksiyon tanımından ne anladıklarına yönelik ifadeleri incelendiğinde, öğretmen adaylarının tümünün bir fonksiyonun örten olabilmesi için değer kümesinde açıkta eleman kalmayacağını yani değer kümesindeki her elamanın tanım kümesindeki en az bir eleman ile eşleşeceğini ifade ettikleri belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının örten fonksiyon tanımına yönelik kavramsal bilgilerinde bir eksikliğin olmadığı söylenebilir.

Öğretmen Adaylarının Yakınsak Dizi ve Cauchy Dizisi Tanımlarını Anlayışları

Bu bölümde reel sayı dizileri için yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımları öğretmen adaylarına sunulmuştur. Öğretmen adaylarından tanımları sesli bir şekilde okumaları rica edilmiştir. Tanımları okuyan öğretmen adaylarına, tanımlardan ne anladıklarını kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının yakınsak dizi tanımına yönelik anlayışlarının dört kod ve dört kategori atında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 5'te bu kod ve kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 5
Öğretmen Adaylarının Yakınsak Dizi Tanımına Yönelik İfadeleri

Kategoriler	Kod	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Kavramsal anlama	Bir dizinin belli bir teriminden sonraki terimlerinin, bir sayının epsilon komşuluğunda kalması	Adem Aysun Ahu Aziz	*Adem: Bir dizinin terimleri belli bir reel sayıdan farkı çok küçük oluyorsa, epsilona bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa, dizinin tüm terimleri değil de dizinin belli teriminden sonraki terimleri eğer bir sayının epsilon komşuluğunda bulunuyorsa bu dizi o sayıya yakınsıyor demektir.*
Sembolik anlama	$\|sn - s\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısının bulunması.	Barış Belma	*Barış: Yani hocam zaten her ε>0 için $n > n_0$ olduğunu hipotez olarak kabul ediyoruz. Daha sonra s_n dediğimiz genel terimi s limitinden çıkarıyoruz. Mutlak değer farkının ε dan küçük olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulabildiğimiz zaman biz buna yakınsak dizi diyoruz.*
Hatalı anlama	Reel sayı dizisinin epsilona bağlı olması	Buse	*Buse: Önce epsilon ve s_n reel sayı dizisi var. Bu reel sayı dizisi de epsilona bağlı olursa yakınsak olur. Eğer epsilon sayısına bağlı değilse de ıraksak dizi olur.*
Kavram karmaşası	Grafiksel olarak kopukluk olmaması ve dizinin iki tane terimi arasındaki farkın sıfıra yakınsaması	Bilge	*Bilge: Grafiksel olarak limitinin kopmaması ya da limitinin olması diyebilirim. Mesela bir tane dizi alayım. Dizinin iki tane terimi arasındaki farkın sıfıra yakınsaması*

Tablo 5 incelendiğinde, öğretmen adaylarından Ahu, Aysun, Aziz ve Adem'in yakınsak dizi tanımına, bir dizinin belli bir teriminden sonraki terimlerinin, bir sayının epsilon komşuluğunda kalması anlamını yükledikleri belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarına tanımda yer alan n_0 teriminin, yakınsak dizi tanımındaki işlevinin ne olduğu sorulmuştur. Alınan cevaplar incelendiğinde öğretmen adaylarının tanımda yer alan n_0 terimi hakkında yeterli bilgiye sahip oldukları tespit edilmiştir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Aysun ve Adem'in yakınsak dizi tanımında yer alan n_0 terimi hakkındaki ifadeleri sunulmuştur.

Aysun: Sonlu tane, yani n_0 tane terim komşuluğun dışında kalacak, sonsuz terim komşuluğun içinde kalacak.

Adem: Bu terimden sonraki terimler sayının epsilon komşuluğunda kalmalıdır. Diyelim ki $n_0 = 5$, 5'ten sonraki terimler epsilon komşuluğu içinde kalacak 1., 2., 3., 4., 5. terimler epsilon komşuluğu dışında kalacak.

Buna göre Aysun, Ahu, Adem ve Aziz'in yakınsak dizi konusunda kavramsal anlamaya sahip oldukları söylenebilir. Barış ve Belma ise yakınsak dizi tanımından $|s_n - s| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısının bulunmasını anladıklarını ifade etmişlerdir. Belma ve Barış'ın ifadelerinde yakınsak dizi tanımında n_0'ın işlevine dair herhangi bir bilgi yer almamıştır. Bu öğretmen adaylarının tanımda yer alan n_0 terimi hakkındaki bilgilerini sorgulamak için "n_0'ın tanımdaki işlevi nedir?" sorusu yöneltilmiştir. Alınan cevaplara göre Barış ve Belma'nın yakınsak dizi tanımında önemli bir yer tutan n_0 terimi hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Aşağıda Barış ve Belma'nın ifadelerine yer verilmiştir.

Belma: Vardı ama… O neydi? En küçük bir değer ama… Tam hatırlayamadım.

Barış: Şu an aklıma gelmiyor ama bir şey vardı yani. Limiti ya da tanımı bozmaması içindi. Bir önemi vardı ama şuan aklıma gelmedi.

Buna göre Barış ve Belma'nın yakınsak dizi tanımını kendi cümleleri ile doğru bir şekilde ifade edemedikleri belirlenmiştir. Bu öğretmen adayları tanımda bulunan ifadeleri tekrarlamışlardır. Barış ve Belma'nın yakınsak dizi tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal düzeyde oluşmadığı ve sembolik olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Buse ise yakınsak dizi tanımından anladığı şeyin, "reel sayı dizisinin epsilona bağlı olması" olduğunu ifade etmiştir. Buse'nin ifadelerindeki anlaşılmazlığa açıklık getirebilmek için Buse'ye de yakınsak dizi tanımında yer alan n_0 teriminin işlevinin ne olduğu sorulmuştur. Alınan cevaba göre, Buse'nin n_0 teriminin işlevi hakkında bilgisinin olmadığı açığa çıkmıştır. Aşağıda Buse'nin görüşlerine yer verilmiştir.

> *Buse: n_0, mesela sorularda bize veriyor ya hocam. n_0, n ye bağlı çıkıyor. Yani en sondaki bulduğumuz değer n_0 cinsinden oluyor. n den daha küçük n_0 sayısı seçiyoruz ki, s ye yakınsadığını gösterelim.*

Buse'nin ifadelerine bakıldığında n_0 terimi hakkındaki bilgilerinin yakınsak dizi konusundaki problemlerin çözümündeki işlemlerle sınırlı olduğu belirlenmiştir. Buna göre Buse'nin bu tanımı kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışmasına rağmen matematiksel olarak hatalı ve eksik ifadeler kullandığı anlaşılmıştır. Dolayısıyla Buse'nin yakınsak dizi tanımını hatalı bir şekilde anladığı söylenebilir.

Bilge ise yakınsak dizi tanımından anladığının, dizinin grafiğinde kopukluk olmaması ve dizinin iki terimi arasındaki farkın sıfıra yakınsaması olduğunu ifade etmiştir. Bilge'nin ifadelerinden yakınsak dizi kavramını, sürekli fonksiyon ve Cauchy dizisi kavramları ile karıştırdığı söylenebilir. Bilge yakınsak dizi tanımında yer alan n_0'ın işlevinin ne olduğu sorusuna da uygun bir cevap verememiştir. Aşağıda Bilge'nin n_0'ın işlevine yönelik ifadeleri yer almıştır.

> *Bilge: Oraya bir reel sayı gelecek mesela, dizideki bir terim bir yerde genellemek için kullanılıyor. Yani dizide ona bağlı bir şey bulunabiliyorsa demiş. Epsilona bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa. Onları birbirine benzetmek için. Dizi 2x+1 desem yaptığımız işlemlerle ona benzetmeliyiz yine.*

Öğretmen adaylarının Cauchy dizisi tanımına yükledikleri anlam incelendiğinde, ifadelerin yakınsak dizi tanımındaki ifadeler ile paralel olduğu belirlenmiştir. Tekrara düşmemek adına Cauchy dizisi tanımına yönelik ifadeler sunulmamıştır. Buna göre, öğretmen adaylarından Adem, Ahu, Aysun ve Aziz'in yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımlarına yönelik kavramsal bilgilerinin oluştuğu söylenebilir. Diğer öğretmen adaylarının ise söz konusu bilgilerinin kavramsal bilgi düzeyinde oluşmadığını ifade etmek mümkündür.

Öğretmen Adaylarının Limit ve Süreklilik Tanımlarını Anlayışları

Reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için bir noktadaki limit ve süreklilik tanımları formel olarak öğretmen adaylarına sunulmuştur. Öğretmen adaylarının tanımları incelemelerinin ardından söz konusu tanımlardan ne anladıklarını kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik tanımlarına yönelik kavramsal bilgilerinin sorgulanmasının yanında, bu tanımların öğretmen adayları tarafından ne ölçüde içselleştirildiği belirlenmeye çalışılmıştır. Öncelikle öğretmen adaylarının limit tanımından ne anladıklarına yönelik görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarının ifadelerinin altı kod ve üç kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 6'da söz konusu kod ve kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 6
Öğretmen Adaylarının Limit Tanımına Yönelik İfadeleri

Kategori	Kod	Öğretmen adayları	Örnek ifadeler
Kavramsal anlama	*a*'nın δ komşuluğunda kalan *x*'ler için, görüntülerinin de *L*'nin ε komşuluğunda kalacak şekilde $\delta > 0$ sayısının bulunması	Aysun Aziz	*Aysun: Şimdi $A \subset R$ olduğunda A dan B ye bir f fonksiyonu tanımlanıyor ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun diyor. Sonra her $\varepsilon > 0$ için a nın δ komşuluğunda kalan x ler için görüntülerinin de L nin ε komşuluğunda kalacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x a noktasına yaklaştığında limiti L dir denir.*
	x, a'nın δ komşuluğunda kalırken *f(x)*'in de *L*'nin ε komşuluğunda kalması	Ahu	*Ahu: Hocam, x, a'nın δ komşuluğunda kalıyorken f(x) de L nin ε komşuluğunda kalıyorsa, yani kalacak şekilde ε a bağlı bir δ sayısı varsa o zaman biz x, a ya yaklaşırken fonksiyonun limiti L dir diyoruz.*
	x'ler *a*'ya yaklaşırken görüntülerinin de *L* gibi bir sayıya yaklaşması	Adem	*Adem: x a ya yaklaştığında f fonksiyonunun görüntüsü L dir demek, x a ya yaklaştığında görüntülerinin de bir sayıya yaklaşması demektir.*
Kavram karmaşası	x_1 değeri x_2 değerine giderken, bunların görüntüleri olan y_1 değerinin y_2 değerine yaklaşması.	Bilge	*Bilge: Fonksiyonda bir x_1 değerinden x_2 değerine giderken aynı şekilde x_1 değerine karşılık gelen y_1 değerinin de y_2 ye gidecek şekilde arasındaki farkın ε kadar küçük bir sayı olacağını anlıyorum.*
Sembolik anlama	Fonksiyonun limiti, a noktasına yaklaştığında L dir.	Buse Belma	*Buse: Şimdi bir tane f(x) fonksiyonumuz var. Bu f(x) fonksiyonunun limiti a noktasına yaklaştığında fonksiyonun limitinin L olduğunu söylüyor.*
	x ile a nın farkı δ dan küçük olduğunda *f(x)* ile L nin farkının ε dan küçük olacak şekilde $\delta > 0$ sayısının bulunması	Barış	*Barış: Hocam bu tanım diyor ki; a noktası a'nın bir yığılma noktası olsun. x ile a'nın mutlak değerinin farkı δ dan küçük olduğunda fonksiyon, yani f(x)'in de L den farkı yine ε dan küçük olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x a noktasına yaklaştığında f fonksiyonunun limiti L dir.*

Tablo 6 incelendiğinde öğretmen adaylarının limit tanımını altı farklı biçimde ifade ettikleri belirlenmiştir. Aysun ve Aziz limitin formel tanımından "*a nın δ komşuluğunda kalan x ler için görüntülerinin de L nin ε komşuluğunda kalacak şekilde δ sayısının bulunmasını*" anladıklarını ifade etmişlerdir. Ahu, "*x a'nın δ komşuluğunda kaldığında f(x) görüntüsünün L'nin ε komşuluğunda kalmasının*" limit tanımını ifade ettiğini belirtmiştir. Adem ise limit tanımından "*x'ler a'ya yaklaşırken görüntülerinin de L gibi bir sayıya yaklaşmasını*" anladığını ifade etmiştir. Bu ifadelere göre Aysun, Aziz, Ahu ve Adem'in limitin formel tanımının altında yatan sezgisel düşünceyi keşfettikleri söylenebilir.

Bu öğretmen adaylarının yaptıkları limit tanımlarından, limit tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin oluştuğu düşünülmüştür. Bu düşünceden emin olabilmek ve öğretmen adaylarının tanımdaki topolojik ifadeleri ne kadar içselleştirdiklerini ortaya çıkarmak için limit tanımında önemli bir yer tutan "$0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$" ifadesinin ne anlama geldiği sorulmuştur. Alınan yanıtlar, öğretmen adaylarının tanımdaki ifadelerin anlamlarının farkında olduklarını ortaya çıkarmıştır. Öğretmen adayları kendilerine yöneltilen soruyu komşuluk ve yaklaşma terimleri ile açıklamışlardır. Limit tanımının arkasındaki sezgisel düşünceyi vurgulamışlardır. Aşağıda öğretmen adaylarından Ahu ve Adem'in bu soruya verdikleri yanıtlar sunulmuştur.

Ahu: x, a nın δ komşuluğunda kaldığında aynı şekilde görüntüsünün de L nin ε komşuluğunda kalıyormuş.

Adem: x a ya yaklaşırken f(x) in de L ye yaklaşması demektir. $|x - a| < \delta$ *demek x, a nın δ yarıçaplı komşuluğunda demek. x ler a ya o kadar çok yaklaşmış demek.* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *de aynı şekilde.*

Aysun, Ahu, Aziz ve Adem süreklilik tanımını, limit tanımı ile benzer bir şekilde yapmışlardır. Bu öğretmen adaylarının limit ve süreklilik tanımlarını kendi cümleleri ile doğru bir şekilde açıklayabildikleri için kavramsal anlamaya sahip öğretmen adayları oldukları belirlenmiştir.
Bilge limit tanımından anladığının " x_1, x_2*'ye giderken onun görüntüleri olan* y_1*'in de* y_2*'ye gitmesi*" olduğunu ifade etmiştir. Bilge'nin limitin tanımına yönelik ifadelerinin, limitin tanımında yer alan matematiksel gerçeklerle uyuşmadığı söylenebilir. Bilge, limit tanımını kendi cümleleri ile ifade etmiş fakat doğru bir açıklama yapamamıştır. Yaptığı açıklama limitin tanımından çok, düzgün süreklilik tanımını çağrıştırmaktadır. Buna göre, Bilge'nin limit tanımına yönelik kavram karmaşası yaşadığı söylenebilir. Buse ve Belma da limitin tanımından fonksiyonun limiti a noktasına yaklaştığında limitinin L olmasını anladıklarını ifade etmişlerdir. Buse ve Belma'nın bu ifadesi verilen limit tanımında mevcut olan bir ifadedir. Bu bakımdan Buse ve Belma'nın limitin tanımında yer alan ifadeyi tekrar ettikleri belirlenmiştir. Barış da yaptığı limit tanımında Buse ve Belma gibi, tanımda bulunan ifadeleri tekrar etmiştir. Buna göre Buse, Belma ve Barış'ın limitin tanımını kendi cümleleri uygun bir şekilde açıklayamadıkları tespit edilmiştir. Buna göre bu öğretmen adaylarının limit tanımına yönelik anlamalarının sembolik olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumun, öğretmen adaylarının limitin tanımında yer alan matematiksel ifadeleri anlamlandıramamalarından kaynaklandığı belirlenmiştir. Çünkü bu öğretmen adaylarına da limit tanımında yer alan "$0 < |x - a| < \delta$ *olduğunda* $|f(x) - L| < \varepsilon$" ifadesinin matematiksel olarak ne anlama geldiği sorulduğunda uygun bir cevap verememişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Buse ve Barış'ın verdikleri cevaplara yer verilmiştir.

Buse: Şimdi buradaki x, tanım kümesindeki x. Fonksiyonumuz da f(x). a daki limitin değeri L oluyor. Sonuç L oluyor. İşte bunu matematiksel olarak ifade ediyor.

Barış: x a notasına yaklaştığında… Şimdi a noktası yığılma noktası değil mi? Yığılma noktası. Tamam, o zaman yığılma noktası olduğu için… x in a ya yığıldığı en az bir tane delta sayısı vardır demek

Bu öğretmen adayları, süreklilik tanımını limit tanımına benzer cümlelerle ifade etmeye çalışmışlardır. Buna göre söz konusu öğretmen adaylarının limit ve süreklilik tanımlarına yönelik bilgilerinin kavramsal düzeyde olmadığı söylenebilir.

Öğretmen Adaylarının Türev Tanımını Anlayışları
Bu bölümde öğretmen adaylarına türev tanımı formel bir şekilde sunulmuştur. Öğretmen adaylarının türevin formel tanımından ne anladıklarını kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının türev tanımından ne anladıklarına yönelik ifadelerinin iki kategoriye ayrıldığı tespit edilmiştir. Tablo 7'de öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik ifadelerinden elde edilen kod ve kategoriler sunulmuştur.

Tablo 7
Öğretmen Adaylarının Türev Tanımına Yönelik İfadeleri

Kategori	Kod	Öğretmen adayları	Örnek ifadeler
Sembolik anlama	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limitinin olması	Barış Belma Bilge Buse Aysun	*Buse: A kümesinde bir a elemanı alıyoruz. Bu a da A kümesinin bir yığılma noktası olması gerekiyor. Ayrıca x a ya giderken* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *limitinin olması gerekiyor. Öyleyse a noktasında türevlidir diyoruz.*
Kavramsal anlama	Fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limiti	Adem Aziz Ahu	*Ahu: Yine bir yığılma noktamız var bu önemli bir kısım. f, A kümesinden R ye bir fonksiyon verilmiş. Bu fonksiyon için limit x a ya giderken f(x)-f(a) yı, y deki değişim olarak düşünebiliriz. Yani bu f fonksiyonunun a noktasındaki y deki değişimi ile x deki değişimine oranı verilmiş. Bunun limitini aldığımızda bu f nin a noktasındaki türevi oluyormuş.*

Tablo 7 incelendiğinde Barış, Belma, Bilge, Buse ve Aysun'un türev tanımından $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limitinin mevcut olmasını anladıklarını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adayları türev tanımını kendi cümleleri ile ifade edememişler ve tanımda bulunan ifadeleri olduğu gibi tekrar etmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunun türev tanımını kendi cümleleri ile ifade etmekte güçlük yaşadıkları söylenebilir. Bu güçlüğün sebebi ise öğretmen adaylarının söz konusu tanımdaki anlık değişim oranını temsil eden matematiksel ifadeyi anlamlandıramamalarıdır. Bu öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik anlamalarının sembolik olduğu söylenebilir. Buna karşın Ahu, Adem ve Aziz türev tanımından fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limiti olduğunu anladıklarını belirtmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının limitte yer alan matematiksel ifadeyi yorumlayabildikleri tespit edilmiştir. Buna göre Adem, Ahu ve Aziz'in türev tanımına yönelik kavramsal anlamaya sahip oldukları söylenebilir.

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki (fonksiyonlar, diziler, limit ve süreklilik, türev) tanımları anlama şekillerinin kavramsal anlama, hatalı anlama, sembolik anlama ve kavram karmaşası olmak üzere dört kategori altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Söz konusu tanımları matematiksel gerçeklerle uyumlu, sembollerin altında yatan anlamaların farkında olarak kendi cümleleri ile açıklayabilen öğretmen adaylarının anlayışları kavramsal anlama olarak değerlendirilmiştir. Akademik başarı düzeyi yüksek olan öğrencilerin çoğunlukla kavramsal anlayışa sahip oldukları belirlenmiştir.

Sembolik anlamaya sahip öğretmen adayları kendilerine sunulan formel tanımı kendi cümleleri ile açıklayamayan, tanımı kendisine sunulan bir şekilde tekrarlamaya çalışan ve tanımda bulunan ifadelerin altında yatan anlamların farkında olmayan öğretmen adaylarıdır. Tanımlara yönelik kavramsal olmayan anlayışların yarısından fazlasının sembolik anlamalar olduğu ortaya çıkmıştır. Çalışmada sembolik anlayışa sahip öğretmen adayları olarak Barış ve Belma dikkati çekmiştir. Barış ve Belma'nın analizin temel kavramlarının çoğunluğunda sembolik anlamaya sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Buna göre Belma ve Barış'ın analizin temel tanımlarının çoğuna yönelik kavramsal bilgiye sahip olmadıkları söylenebilir.

Kavramsal olmayan anlayışların bir kısmı da kavram karmaşası kategorisi altında değerlendirilmiştir. Kavram karmaşası kategorisinde değerlendirilen öğretmen adayları söz konusu tanımı kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışmış fakat yaptıkları tanımlamalar tarif edilmek istenen tanımdan uzaklaşarak başka kavramların tanımlarını işaret etmiştir. Kavram karmaşası yaşayan öğretmen adaylarından Bilge dikkati çekmiştir. Bilge görüşmelerin çoğunda bu yönde açıklamalarda bulunmuştur.

Kavramsal anlayışa sahip olmayan öğretmen adaylarında son sırada görülen anlayış şeklinin hatalı anlama olduğu görülmüştür. Hatalı anlamaya sahip öğretmen adayları kendilerine sunulan tanımı kendi cümleleri ile açıklamaya çalışsa da açıklamalarında matematiksel hatalar ya da eksiklikler mevcuttur.

Öğretmen adaylarının tanımları anlayış şekillerine yönelik yapılan bu genel değerlendirmeden sonra, kavramlara yönelik sahip oldukları güçlükler incelenmiş ve aşağıda bölümler halinde sunulmuştur.

Öğretmen adaylarının fonksiyon, birebir fonksiyon ve örten fonksiyon tanımlarını anlayışlarına yönelik sonuç, tartışma ve öneriler

Öğretmen adaylarına ilk olarak formel fonksiyon tanımı verilmiş ve bu tanımdan ne anladıklarını kendi cümleleri ile izah etmeleri istenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda altı öğretmen adayının (Aziz, Ahu, Aysun, Adem, Bilge, Barış) fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile matematiksel olarak doğru bir şekilde tanımlayabildikleri tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının fonksiyon tanımına yönelik anlamlarının kavramsal boyutta olduğu ortaya çıkmıştır. Buna göre, öğretmen adaylarının çoğunun fonksiyon tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin yeterli düzeyde olduğu söylenebilir. Buna karşın fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile ifade edemeyen, diğer kavramlar ile karıştıran öğretmen adayları da tespit edilmiştir. Buse fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile açıklamış fakat bu açıklamasının matematiksel olarak hatalı olduğu tespit edilmiştir. Buse'nin fonksiyon tanımına yönelik hatalı anlamasının olduğu ortaya çıkmıştır. Fonksiyon tanımına yönelik anlayışının tanım kümesindeki bir elemanın görüntü kümesinden bir eleman ile eşleşmesi şeklinde olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durumda Buse'nin anlayışının fonksiyon tanımının özelliklerini tam olarak yansıtmadığı belirlenmiştir. Buse'nin sahip olduğu anlayış, Polat ve Şahiner (2007) tarafından tespit edilen fonksiyon tanımına yönelik kavram yanılgıları ile örtüşmektedir. Polat ve Şahiner (2007) fonksiyonlar konusunda öğrencilerde bulunan kavram yanılgılarından birinin, fonksiyonu "birebir eşlenen bağıntı" şeklinde görmeleri olduğunu tespit etmiştir.

Belma fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile izah etmeye çalışmıştır. Yaptığı fonksiyon tanımında fonksiyon, bağıntı, birebir fonksiyon ve örten fonksiyon tanımlarını birbiri ile karıştırdığı belirlenmiştir. Belma'nın fonksiyon tanımına yönelik kavram karmaşası yaşadığı ortaya çıkmıştır. Belma birebir ve örten bağıntının fonksiyon olduğunu belirtmiştir. Belma'nın fonksiyon kavramına yönelik anlayışının birebir ve örten bağıntı olduğu ortaya çıkmıştır. Belma'nın sahip olduğu kavram anlayışı fonksiyonun tanımı ile uyuşmamaktadır ve öğrencilerde görülen kavram yanılgılarından biridir. Polat ve Şahiner (2007) sınıf öğretmenliği bölümü öğrencilerinin kavram yanılgılarını tespit etmek amacıyla yaptığı çalışmanın önemli bir bulgusu olarak, öğrencilerin %40 oranında "bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için gerekli koşul birebir ve örten olmasıdır" cevabını verdikleri tespit edilmiştir. Kavram yanılgılarını azaltmaya yönelik yapılan öğretim sonucunda bu kavram yanılgısı %5 oranında devam etmiştir. Ayrıca bu sonuç, Vinner'in (1983) öğrencilerin bir kısmının fonksiyon kavramına yönelik kavram imajının örtenlik ve birebirlik olduğu yönündeki bulgularını desteklemektedir.

Öğretmen adaylarının birebir fonksiyon tanımına yönelik anlamaları sorgulandığında, öğretmen adaylarının yarısının (Ahu, Aysun, Adem, Aziz) birebir fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile doğru bir şekilde açıklayabildikleri belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının birebir fonksiyon tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal düzeyde olduğu ortaya çıkmıştır. Barış ve Belma birebir fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile matematiksel olarak hatalı bir şekilde izah etmişlerdir. Buna göre bu öğretmen adaylarının birebir fonksiyon tanımına yönelik hatalı anlamalarının mevcut olduğu söylenebilir. Barış ve Belma birebir fonksiyon tanımını "elemanlar eşit iken görüntüler de eşittir" şeklinde yaptıkları belirlenmiştir. Barış ve Belma'da görülen bu hatalı ifadenin onlarda bulunan bir kavram yanılgısı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adayları bu hatalı düşüncelerini ısrarla savunmuşlardır. Buse ve Bilge birebir fonksiyon tanımını kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışmış fakat bu ifadelerin birebir fonksiyon tanımından daha çok fonksiyon tanımını çağrıştırdığı ortaya çıkmıştır. Bu öğretmen adaylarının birebir fonksiyon tanımına yönelik kavram karmaşası yaşadığı belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının yarsının birebir fonksiyon tanımına yönelik bilgileri kavramsal bilgi düzeyinde iken diğer yarısının ise bu düzeyde olmadığı tespit edilmiştir.

Öğretmen adaylarının tümünün örten fonksiyon tanımına yönelik kavramsal anlamaya sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının örten fonksiyon tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal bilgi düzeyinde olduğu söylenebilir. Öğrencilerin örten fonksiyona yönelik sahip oldukları anlayış "fonksiyonun görüntü kümesinde açıkta eleman kalmaması" şeklindedir.

Çalışma sonucunda bazı öğretmen adaylarının fonksiyon tanımını anlamada güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Elde edilen bu sonuç öğrencilerin fonksiyon tanımını anlamakta güçlük yaşadıkları yönündeki çalışma sonuçları ile uyum içindedir (Abdullah, 2010; Hatısaru ve Erbaş, 2010). Öğretmen adaylarının bir kısmının birebir fonksiyon tanımına yönelik kavram yanılgılarının olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerde bulunan bu kavram yanılgısının giderilmesi için gerekli çalışmalar yapılmalıdır. Birebir fonksiyon tanımı üzerinde durulmalı, söz konusu kavram yanılgısı öğrencilerle tartışılmalı ve bu yanılgının mantıksal-matematiksel açıklaması öğrencilere yapılmalıdır.

Bazı öğretmen adayları da fonksiyon tanımı ile birebir fonksiyon tanımını birbiri ile karıştırmış, birbiri yerine kullanmışlardır. Elde edilen bu sonuca daha önce yapılan çalışmalarda da değinilmiştir (Bayazıt, 2008; Polat ve Şahiner, 2007; Vinner, 1983). Öğretim sırasında öğrencilerin sahip oldukları bu güçlükler dikkate alınarak öğretim yapılmalıdır. Söz konusu kavramların birbirinden farkları üzerine sınıf ortamında tartışmalar yapılabilir. Öğrencilerin bu tanımları kavramsal boyutta öğrenip öğrenmediği sorgulanmalıdır. Çünkü öğretilen kavramlar ne kadar temel ya da basit olursa olsun, bazen öğretildiği düşünülen kavram ile öğrencilerin gerçekten öğrendiği kavram arasında büyük bir uçurum olabilmektedir (Tall ve Bakar, 1992).

Öğretmen adaylarının yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımlarını anlayışları üzerine sonuç, tartışma ve öneriler

Öğretmen adaylarının yarısının (Aziz, Aysun, Ahu, Adem) yakınsak dizi tanımını kendi cümleleri ile doğru bir şekilde ifade ettikleri belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarının yakınsak dizi tanımına yönelik anlamalarının kavramsal olduğu ortaya çıkmıştır. Barış ve Belma yakınsak dizi tanımını kendi cümleleri ile ifade edemeyerek kendilerine sunulan tanımdaki ifadeleri tekrarlamışlardır. Bu öğretmen adaylarının yakınsak dizi tanımına yönelik anlamalarının sembolik olduğu söylenebilir. Buse ise yakınsak dizi tanımını kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışsa da başarılı olamamıştır. Buse'nin yakınsak dizi tanımına yönelik hatalı anlamaya sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Bilge'nin yakınsak dizi tanımını kendi cümleleri ile ifade ederken birden çok farklı kavrama yönelik ifadeler üretmiştir. Bilge yakınsak dizi kavramını sürekli fonksiyon ve Cauchy dizisi kavramları ile karıştırdığı ya da aradaki ayrımın farkında olmadığı ortaya çıkmıştır. Buna göre, Bilge'nin kavram karmaşası yaşadığı söylenebilir.

Öğretmen adaylarının Cauchy dizisi tanımına yönelik anlamalarının yakınsak dizi tanımına yönelik anlamaları ile benzerlik gösterdiği tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal bilgi düzeyinde olduğu, diğer öğretmen adaylarının bilgilerinin ise bu düzeyde olmadığı belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının, yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımlarına yönelik kavramsal bilgilerini sorgularken birçok güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Bu güçlükler aşağıda sıralanmıştır.

Öğretmen adaylarının yarısının yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımında bulunan n_0 teriminin tanımlardaki işlevi hakkında bilgi sahibi olmadıkları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının bu güçlüğü, onların bu tanımlara yönelik kavramsal bilgi düzeyinde olup olmadıklarının bir belirleyicisi olmuştur. Tanımlara yönelik kavramsal anlamaya sahip olan öğretmen adayları, bu terimin işlevi hakkında doğru bilgilere sahip iken diğer öğretmen adaylarının yeterli bilgiye sahip olmadıkları ortaya çıkmıştır. Yakınsak dizinin tanımına yönelik kavramsal anlamaya sahip olmayan öğretmen adayları, bu terimin tanımdaki rolünü belirtmek yerine onun nasıl bulunacağına yönelik işlemsel bilgiler vermeye çalışmışlardır. Elde edilen bu sonuçlar, Mamona-Downs (2001) tarafından yapılan çalışmanın sonuçları ile benzerlik göstermiştir. Mamona-Downs (2001), öğrencilerin çoğunun yakınsak dizinin tanımını anlamada zorluk yaşadıklarını ifade etmiştir. Tanımda bulunan ve bazı pozitif tamsayıları temsil eden n_0 kesme noktasının işlevini anlamakta güçlük yaşandığını ifade etmiştir. Ona göre, öğrencilerin bu terimi anlamada huzursuz olmasının iki sebebi vardır. Birincisi, bu terimin yakınsak dizi tanımında yer alan eşitsizlik gibi ilk anda odaklanılan ana özellik olmamasıdır. İkincisi ise, bu terimin daha çok nasıl bulunacağının araştırılmasıdır. Öğrencilerin matematik geçmişleri algoritmik temellere dayandığı için bu terimin tanımdaki rolünü belirlemede başarısız olmuşlardır (Mamona-Downs, 2001).

Öğretmen adaylarının bir kısmının tanımlarda bulunan topolojik ifadeler ve matematiksel notasyonlar hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları ve anlamlandıramadıkları belirlenmiştir. Yakınsak dizi kavramı ile sürekli fonksiyon kavramını birbiri ile karıştırmışlardır. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar, öğrencilerin analiz derslerinde yakınsak dizi tanımını anlamakta güçlük yaşadıkları çalışma sonuçlarını desteklemiştir (Doruk ve Kaplan, 2015; Roh, 2008; Tall ve Vinner, 1981). Roh (2008) çalışmasında öğrencilerin yakınsak dizi kavramına yönelik kavram imajlarının, yakınsak dizi tanımını öğrenmeleri üzerinde etkili olduğunu belirtmiştir. Bu anlamda yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımlarının öğretimi sırasında öğrencilerin doğru kavram anlayışına sahip olmaları adına gerekli çalışmalar yapılmalıdır. Bu çalışmalardan ilk akla gelen yöntem öğretim sırasında görselleştirmeden yararlanılmasıdır. Her ne kadar ileri matematik derslerinde görselleştirme ile öğrenmenin yararlı olmadığını düşünen araştırmacılar olsa da (Alcock ve Simpson, 2004), reel analizin öğreniminde olumlu katkılar sağlayacağını düşünen araştırmacılar da mevcuttur (Pinto ve Tall, 2002). Öğrencilerin bu kavramalara yönelik doğru kavram anlayışına sahip olmaları adına en azından, kavramların tanıtımı sırasında yardımcı bir araç olarak görsellikten yararlanılabilir. Ayrıca, bu güçlüklerin üstesinden gelebilmek için diziler konusunun öğretimi sırasında dizilerin ne olduğu, yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımında bulunan ifadelerin ve sembollerin ne anlama geldiği, yakınsak dizi ile bir noktadaki fonksiyonun limiti kavramları arasındaki farklar vurgulanmalıdır.

Weber (2004) yaptığı çalışmada, üniversite matematik lisans derslerinde yakınsak dizi kavramının öğretiminde çoğunlukla öğrencileri ezber yapmaya sevk eden formel ve prosedürel bir öğretim yaklaşımının sergilendiğini ifade etmiştir. Bu derslerin öğretiminden sorumlu öğretim elemanlarına öğretim yöntemlerini gözden geçirerek öğretmen adaylarının en azından bu kavramların ne olduğuna yönelik kavramsal anlamalarını geliştirecek uygulamalar yapmaları önerilebilir.

Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik tanımlarını anlayışlarına yönelik sonuç, tartışma ve öneriler

Dört öğretmen adayının (Aysun, Aziz, Ahu, Adem) limit tanımını kendi cümleleri ile ve doğru bir şekilde ifade edebildikleri tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının tanıma yönelik anlamalarının kavramsal boyutta olduğu ortaya çıkmıştır. Buse, Belma ve Barış limit tanımını kendi cümleleri ile ifade edememiştir. Bu öğretmen adayları kendilerine sunulan limit tanımındaki ifadeleri tekrarlamışlardır. Öğretmen adaylarının limit tanımına yönelik sembolik bir anlamaya sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Bilge ise limit tanımını kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışmış fakat limit tanımının belirttiği düşünceyi yansıtmayan, daha çok düzgün süreklilik kavramını anımsatan ifadeler kullanmıştır. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının limit tanımına yönelik kavramsal anlamaya sahip iken diğer öğretmen adaylarının ise kavramsal anlamaya sahip olmadıkları tespit edilmiştir.

Öğretmen adaylarının limit tanımını kendi cümleleri ile ifade edememelerinin nedenin ise limit tanımında bulunan topolojik ifadelerin anlamlandırılamaması olduğu tespit edilmiştir. Tanımı kendi cümleleri ile doğru bir şekilde ifade edebilen öğretmen adayları bu ifadelerin ne anlama geldiği konusunda bilgi sahibi iken diğer öğretmen adaylarının bu ifadelerin anlamına yönelik doğru bir anlayışta olmadıkları tespit edilmiştir. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar daha önce yapılmış çalışmaların sonuçları ile paralellik göstermektedir. (Baki ve Çekmez, 2012; Barak, 2007; Baştürk ve Dönmez, 2011; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas vd., 1996; Williams, 1991). Barak (2007) matematik öğretmeni adaylarının limit tanımı anlayışlarının ezber odaklı olduğunu, limit tanımı ve tanım içerisindeki topolojik ifadeler ve sembolleri anlama konusunda güçlük yaşadıklarını tespit etmiştir. Baki ve Çekmez (2012) de ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin limit tanımının içerisinde yer alan eşitsizlikleri anlama ve yorumlamada başarısız olduklarını belirtmişlerdir. Williams (1991) öğrencilerin çoğunun limitin formel tanımı ile ilişkili bir görüş benimseyemediklerini ifade etmiştir. Cottrill vd. (1996) çalışmalarındaki çok az sayıda öğrencinin limitin formel tanımını anlayabildiklerini ve öğrencilerin hiçbirinin özel durumlarda limit tanımını uygulayamadıklarını tespit etmişlerdir. Yapılan araştırmalar öğrenciler arasında limit kavramının tam olarak anlaşılmasının oldukça güç olduğunu ortaya çıkarmıştır (Tall ve Vinner, 1981; Williams, 1991).

Öğrencilerin limit tanımına yönelik kavramsal bilgiler elde etme adına hiç şüphesiz dersin öğretiminden sorumlu öğretim elamanlarına büyük iş düşmektedir. Öğretmen adaylarının limit tanımı hakkında kavramsal düzeyde bilgilere sahip olabilmeleri için öğretim sırasında öğrencilerin algılamakta güçlük çektikleri noktalar üzerinde durulması yararlı olacaktır. Bezuidenhout (2001) da analiz dersinin öğretiminden sorumlu olan öğretim elemanlarının öğrenci anlayışlarının kaynağı ve muhtemel kavram yanılgılarının farkında olmasını önermiştir. Ayrıca öğrencilerin sınavlarda değerlendirilmesinde işlemsel becerinin gerekli olduğu problemlerin yanında, limit tanımına yönelik kavramsal bilgi gerektiren soruların da sorulması önerilebilir. Bu sayede, öğrencilerin limitin formel tanımı üzerine yoğunlaşmaları ve anlamak için gayret göstermeleri sağlanabilir. Öğrencilere derslerde ve sınavlarda sorulan sorular kavramsal bilgiye ihtiyaç duyulmadan çözülebildiği için öğrenciler, limit kavramının kavramsal yapısından çok limitin kolay, pratik uygulama modellerini tercih etmektedirler (Williams, 1991). Öğretmen adaylarının sürekliliğin formel tanımına yönelik anlayış şekillerinin limitin tanımına yönelik anlayışları ile birebir örtüştüğü ortaya çıkmıştır.

Öğretmen adaylarının türev tanımını anlayışlarına yönelik sonuç, tartışma ve öneriler

Öğretmen adaylarına türev tanımı formel olarak sunulmuş ve bu tanımdan ne anladıklarını kendi cümleleri ile ifade etmeleri istenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda beş öğretmen adayının (Barış, Belma, Bilge, Buse, Aysun) türev tanımını kendi cümleleri ile ifade edemedikleri ve kendilerine sunulan tanımdaki ifadeleri tekrarladıkları tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik anlamalarının sembolik olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Adem, Aziz ve Ahu'nun türev tanımını kendi cümleleri ile doğru bir şekilde ifade edebildikleri belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik anlamalarının kavramsal düzeyde olduğu ortaya çıkmıştır. Bu öğretmen adaylarının türev tanımına yönelik anlayışlarının "fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limiti" şeklinde olduğu ortaya çıkmıştır. Çalışmanın bu sonucu, Bingölbali ve Monaghan'ın (2008) çalışmalarındaki matematik bölümü öğrencilerinin kavram imajları ile uyumludur. Ayrıca, öğrencilerin bu türev anlayışı, Hartter'ın (1995) belirlediği türev anlama düzeylerinin en üst düzeyi olan üçüncü düzey anlamaya karşılık gelmektedir. Öğretmen adaylarının çoğunun türev tanımına yönelik bilgilerinin kavramsal bilgi düzeyinde olmadığı söylenebilir. Bu durumda türev tanımının altında yatan sezgisel düşüncenin öğrencilerin çoğu tarafından bilinmediğini söylemek mümkündür. Çalışmadan elde edilen bu sonuç türev kavramının öğrencilerin anlamakta ve anlamlandırmakta zorlandıkları bir kavram olduğu görüşlerini desteklemektedir (Bingölbali, 2008; Habre ve Abboud, 2006).

Öğrencilerin türev tanımına yönelik kavramsal anlamaya sahip olamamalarının sebepleri arasında öğrencilerin türevin formel tanımını önemsememeleri olduğu düşünülmektedir. Yapılan araştırmalarda öğrencilerin birçok problemi formel tanıma gereksinim duymadan çözebileceklerini düşündükleri ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin bu yaklaşımı onların türev tanımını önemsememelerine ve kavramsal bilgiye sahip olamamalarına yol açmıştır. Örneğin Habre ve Abboud (2006) çalışmalarında öğrencilerin yarısından azının türevin formel tanımını ifade edebildiklerini, çok azının ise türevin tanımına yönelik kavramsal bilgi gerektiren basit bir problemi çözebildiklerini belirtmiştir. Açıkyıldız (2013) yaptığı çalışma sonucunda da matematik öğretmeni adaylarının türev kavramına yönelik yüzeysel anlamaya sahip olduklarını, tanımların içeriklerini tam olarak özümseyemediklerini belirtmiştir. Bu nedenle öğretmen adaylarının türev-limit, türev-değişim oranı ve türev-teğet arasındaki ilişkileri yorumlamada güçlük yaşadıklarının ifade etmiştir. Bu anlamda matematik öğretmeni yetiştiren kurumlardaki ilgili derslerde türev tanımının altında yatan düşünceler vurgulanmalıdır. Derslerde türev tanımına yönelik kavramsal bilgiler gerektiren problemlere yer verilmesi ve değerlendirmede kullanılması önerilebilir.

Bu çalışma nitel araştırma yaklaşımı benimsenerek sekiz ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Çalışmanın sonuçları fonksiyon, dizi, limit, süreklilik ve türev konularındaki formel tanımlarla sınırlandırılmıştır. Bu çalışma farklı araştırma grupları ve farklı formel tanımlar kullanılarak tekrarlanabilir. Bu sayede öğrencilerin farklı alanlardaki formel tanımlara yönelik anlayışları ortaya çıkarılabilir. Yapılacak bu tarz çalışmalardan elde edilecek sonuçların literatürde mevcut boşluğu doldurmanın yanında ilgili derslerin öğretim kalitesini de artıracağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA/REFERENCES

Abdullah, S.A.S. (2010). Comprehending the concept of functions. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 8,* 281-287.

Açıkyıldız, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının türev kavramını anlamaları ve yaptıkları hatalar*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, Türkiye.

Akbulut, K. ve Işık, A. (2005). Limit kavramının anlaşılmasında etkileşimli öğretim stratejisinin etkinliğinin incelenmesi ve bu süreçte karşılaşılan kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *13*(2), 497-512.

Akkoç, H. (2003). *Students' understanding of the core concept of function*. Unpublished doctoral dissertation, University of Warwick.

Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, *57*(1), 1-32.

Arslan, S., & Çelik, D. (2013). Zor sanılan iki kavram: Limit ve süreklilik. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bilgölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 463-487). Ankara: Pegem Akademi.

Baki, A. (2014). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. (5. Baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Baki, M. ve Çekmez, E. (2012). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının limit kavramının formal tanımına yönelik anlamalarının incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 3*(2), 81-98.

Balcı, M. (1999). *Matematik analiz I*. (6. Baskı). Ankara: Balcı Yayınları.

Barak, B. (2007). *Limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir, Türkiye.

Baştürk, S. ve Dönmez, G. (2011). Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *5*(1), 225-249.

Bayazıt, İ. (2008). Fonksiyon konusunun öğreniminde karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri. Mehmet Fatih Özmantar, Erhan Bilgölbali ve Hatice Akkoç. (Ed.). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (s. 91-119). Ankara: Pegem Akademi.

Baykul, Y. (2002). *İlköğretimde matematik öğretimi (6.-8. sınıflar için).* Ankara: Pegem Yayıncılık.

Baykul, Y. (2014). *Ortaokullarda matematik öğretimi.* (2 baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(4), 487–500.

Bingölbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(1), 19-35.

Bingölbali, E. (2008). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. Mehmet Fatih Özmantar, Erhan Bilgölbali ve Hatice Akkoç (Ed.). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (s. 223-255). Ankara: Pegem Akademi.

Birgin, O., & Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *22*(2), 529-550.

Bozkurt, A. (2013). Diziler: Belli bir kurala göre sıralı listeler. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bilgölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 489-499). Ankara: Pegem Akademi.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2012). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (13. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Çakımcı, T. ve Kabasakal, V. (2016). *Ortaöğretim ileri düzey matematik 12*. Ankara: Nova Yayıncılık Ticaret Limited Şirketi.

Çakıroğlu, E. (2013). Matematiksel kavramların tanımlanması. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bilgölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 1-13).

Çetinkaya, B., Erbaş, A.K., & Alacacı, C. (2013). Değişim oranı olarak türev ve tarihsel gelişimi. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bilgölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 529-555). Ankara: Pegem Akademi.

Davis, R., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5,* 281-303.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2015). The relationship among pre-service mathematics teachers' conceptual knowledge, opinions regarding proof and proof skills. *Mevlana International Journal of Education, 5*(1), 45-57.

Duru, A. (2006) *Bir fonksiyon ve onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorluklar*. Yayımlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye.

Ferrini-Mundy, J., & Lauten, D. (1993). Teaching and learning calculus. In P. Wilson (Ed.), Research ideas for the classroom: High school mathematics (pp.155–176). New York: Macmillan.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57-72.

Hartter, B.J. (1995). *Concept image and concept definition for the topic of the derivative* (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9603516)

Hatısaru, V., & Erbaş, A. K. (2010). Students' perceptions of the concept of function: The case of Turkish students attending vocational high school on industry. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 3921-3925.

Jordaan, T. (2005). *Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students.* Unpublished master of science dissertation, University of South Africa, Pretoria, Republic of South Africa.

Kadıoğlu, E., & Kamali, M. (2003). *Genel matematik*. (3. Baskı). Erzurum: Bakanlar Matbaacılık.

Kaleli Yılmaz, G. (2015). Durum çalışması. Mustafa Metin (Ed.). *Kuramdan uygulamaya eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri* içinde (s. 261-285). Ankara: Pegem Akademi.

Kertil, M. (2014). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının bir model geliştirme ünitesi aracılığı ile türevi anlamaları*. Yayımlanmamış doktora tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational studies in mathematics*, *48*(2-3), 259-288.

Merriam, S.B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber*. (Çev. Ed. S. Turan). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013). *Ortaöğretim Matematik Dersi 9-12. Sınıflar Öğretim Programı.* Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.

Musayev B., Alp, M., & Mustafayev, N. (2007). *Teori ve çözümlü problemlerle Analiz II.* (2. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Olkun, S., & Toluk Uçar, Z. (2009). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi.* (4. baskı). Ankara: Maya Akademi.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 235-250.

Oxford University. (2010). *Advenced Learner's Dictionary (International students' edition).*(8th edition). New York: Oxford University Press

Patton, M.Q. (2014). Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri. (Çev. Ed. M. Bütün ve S. B. Demir). Ankara: Pegem Akademi.

Pinto, M., & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory. *For the learning of mathematics*, *22*(1), 2-10.

Polat, Z.S., & Şahiner, Y. (2007). Bağıntı ve fonksiyonlar konusunda yapılan yaygın hataların belirlenmesi ve giderilmesi üzerine boylamsal bir çalışma. *Eğitim ve Bilim*, *32*(146), 89-95.

Roh, K.H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational studies in Mathematics*, *69*(3), 217-233.
Sofronas, K.S., DeFranco, T.C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(2), 131-148.
Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *Journal of Mathematical Behavior, 30* (2011), 93–114.
Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(1), 39-50.
Tall. D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.
Thomas, G.B., Weir, M.D., & Hass, J.R. (2013). *Thomas kalkülüs* (12. baskı). (Çev. Ed. M. Bayram). İstanbul: Pearson.
Türk Dil Kurumu [TDK]. (2015). *Türkçe Sözlük.* Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları
Vinner, S. (1983). Concept definition concept image and the notion of function. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology, 14 (3),* 293-305.
Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.
Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 115-133.
Williams, S.R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236.
Yalçınkaya, İ. (2012). *Analiz III (Diziler ve Seriler)*. Konya: Dizgi Ofset.
Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (8. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, S. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics: Research in Collegiate Mathematics Education, 4*(8), 103-127.

İletişim/Correspondence
Dr. Öğr. Üyesi Muhammet DORUK
mdoruk20@gmail.com
Prof. Dr. Abdullah KAPLAN
akaplan@atauni.edu.tr