172

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

MİNİMAL YÜZEYLER ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Baki KARLIĞA
Elazığ Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi
Matematik Asistanı

Elazığ 1982

Beni bu çalışmaya sevkeden ve yöneten,çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Cebir-Geometri Kürsüsü Başkanı, Hocam; Sayın Prof. Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU'na şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET

Manifoldlar Teorisinde, bilhassa son yıllarda, Minimal yüzeyler üzerende yoğun çalışmaların yapıldığını görüyoruz ([11] gibi) . Bu nedenle önemli bir araş - tırma alanıdır diye düşündüğüm bu dalda neler yapılabile_ ceğini görmek arzusu beni bu çalışmaya iten ilk etken olmuştur.

Çalışmada R.Osserman [11] tarafından verildiği gibi, bir Sörvey ~~yüzey~~ anlamı yoktur. Daha ziyade iyi bilinen bazı teoremlerin ispatlarında değişik diyebileceğimiz yollar denedim. Bazı teoremlerin de birleştirilmesiyle yeni sonuçlar (sonuç 3.1.1. gibi) elde ettim. Bu ara_ da 8 tane teoremin de orjinal olduğunu zannediyorum. (Teorem 1.1.2 ; 1.1.3 ; 1.1.5 ; 1.2.1 ; 2.1.3 ; 2.2.2 ; 3.1.2 ; 3.1.3).

Bütün bunlardan oluşan bu tez üç bölüm halindedir. 1.bölüm tamamen konu ile ilgili temel kavramlara ve hiper_ yüzeyler teorisine ayrılmıştır. 2. bölüm, 3-boyutlu Öklid Uzayında minimal yüzeyler teorisine ve 3.bölüm de minimal hiperyüzeyler teorisine ayrılmıştır.

BÖLÜM 1

1.1 TEMEL KAVRAMLAR

TANIM 1.1.1(Hiperyüzey):

M, bir C^∞ (n-1)-manifold ve

$$f: M \longrightarrow E^n$$

dönüşümünün rankı (n-1) ise $f(M) = \mathcal{M} \subset E^n$ altmanifolduna E^n de bir hiperyüzey denir [1].

TANIM 1.1.2 (Riemann Konneksiyonu):

M bir Riemann Manifoldu, $\chi(M)$'de M' nin vektör alanları uzayı olsun.

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X, Y) \longrightarrow D_X Y = (dy_1(X), \ldots, dy_n(X))$$

şeklinde tanımlı D fonksiyonuna,

i) $D_X(Y+Z) = D_X Y + D_X Z$, $X,Y,Z \in \chi(M)$

ii) $D_{X+Y} Z = D_X Z + D_Y Z$, $X,Y,Z \in \chi(M)$

iii) $D_{fX} Y = f D_X Y$, $f \in C^\infty(M, IR)$

iv) $D_X fY = X[f] Y + f D_X Y$

v) $A \subset M$ ve C^∞ ; $X,Y,Z \in \chi(A)$ için
$D_X Y - D_Y X = [X,Y]$

vi) $X\langle Y,Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$

özelliklerini sağlıyorsa, M üzerinde bir Riemann Konneksiyonu denir [2].

TANIM 1.1.3 (Weingarten Dönüşümü):

M, E^n de bir hiperyüzey ve M' nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n de Riemann Konneksiyonu D olmak üzere

$$S: \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$X \longrightarrow S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne Weingarten dönüşümü denir [2].

TANIM 1.1.4 (P-vektör Uzayı ve P-vektör):

V, bir n-boyutlu vektör uzayı ve $\Lambda^P(V)$ de alterne P-lineer fonksiyonların cümlesi olsun. Bu taktirde $\Lambda^P(V)$ de $\binom{n}{p}$-boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu uzayın herbir vektörüne P-vektör denir [3] .

LEMMA 1.1.1.

V, n-boyutlu,iç çarpımlı vektör uzayı olsun. Bu taktirde $\Lambda^P(V)$ ' de;

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \Lambda^P(V) \times \Lambda^P(V) &\longrightarrow IR \\ (\alpha , \beta) &\longrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = \det\left[\langle \alpha_i , \beta_j \rangle\right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bilineer fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur.

İSPAT:

(i) $\forall \alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p ,\ \beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_p \ \in \Lambda^P(V)$ için,

$$\langle \alpha , \beta \rangle = \det\left[\langle \alpha_i , \beta_j \rangle\right] = \det\left[\langle \beta_j , \alpha_i \rangle\right] = \langle \beta , \alpha \rangle$$

dır.

(ii) $a \in IR$ için

$$\langle a\alpha , \beta \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle a\alpha_1 , \beta_1 \rangle \ldots \langle a\alpha_1 , \beta_p \rangle \\ \langle \alpha_2 , \beta_1 \rangle \ldots \langle \alpha_2 , \beta_p \rangle \\ \langle \alpha_p , \beta_1 \rangle \ldots \langle \alpha_p , \beta_p \rangle \end{bmatrix}$$

$$= a\det\left[\langle \alpha_i , \beta_j \rangle\right] = a\langle \alpha , \beta \rangle \qquad (1.1.1)^{*}$$

dır.

V nin ortonormal bazı $\{ \delta^i : 1 \leq i \leq n \}$ olsun.

$H = \binom{1 \ \ldots \ P}{h_1 \ldots \ h_p}$; $1 \leq h_1 < \ldots < h_p \leq n$, $\gamma_1 \ldots \gamma_p \in V$ için

$$\alpha = \sum_H a_H \delta^H \ , \beta = \sum_H b_H \delta^H \ , \gamma = \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_p$$

olmak üzere

$$\alpha + \beta = \sum_H (a_H + b_H)\,\delta^H = \sum_H c_H \delta^H$$

$(1.1.1)^*$ ' dan

$$\langle \alpha+\beta, \gamma \rangle = \langle \sum_H c_H \delta^H , \gamma \rangle = \sum_H c_H \langle \delta^H , \gamma \rangle$$

$$= \langle \alpha , \gamma \rangle + \langle \beta , \gamma \rangle .$$

$$\text{(iii)} \ \langle \alpha , \alpha \rangle \neq 0 \Rightarrow \sum_H (a_H)^2 > 0 \ .$$

$$\langle \alpha , \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \ \det \left[\langle \alpha_i , \alpha_j \rangle \right] = 0 \ ,$$

$\exists i$ için $\alpha_i \in S_p \{\alpha_1 , \dots , \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots , \alpha_p\}$ dir. Buradan da $\alpha = 0$ bulunur. Tersine; $\alpha = 0$ ise $\langle \alpha , \alpha \rangle = 0$ olduğu açıktır. (i),(ii),(iii) ' den $\Lambda^P(V)$ bir iç çarpımlı vektör uzayıdır.

TEOREM 1.1.2:

M , E^n de parametreleri $(u_1 , \dots , u_{n-1})$, parametrik denklemi;

$$X: E^{n-1} \longrightarrow E^n \ , \ (u_1, \dots, u_{n-1}) \longrightarrow X(u_1, \dots , u_{n-1})$$

olan bir hiperyüzey olsun. $X_i = \partial X / \partial u_i$ ve

$$A_i^j = \frac{\langle X_1 \wedge \dots \wedge X_{i-1} \wedge S(X_j) \wedge X_{i+1} \wedge \dots \wedge X_{n-1} , \ X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1} \rangle}{\| X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1} \|^2}$$

olmak üzere M' nin Weingarten dönüşümünün matrisi $S = \left[-A_i^j \right]$.

İSPAT :

$\{ X_i : 1 \leq i \leq n-1 \}$ sistemini $\mathcal{X}(M)$ için bir baz olarak alırsak;

$$S(X_j) = A_1^j X_1 + A_2^j X_2 + \dots + A_{n-1}^j X_{n-1}$$

yazabiliriz. Bu eşitliğin her iki tarafını $X_1, \dots, X_{n-1}$ ile çarparsak;

$$\begin{array}{l} \langle S(X_j),X_1\rangle = A_1^j\langle X_1,X_1\rangle + \dots + A_i^j\langle X_i,X_1\rangle + \dots + A_{n-1}^j\langle X_{n-1},X_1\rangle \\ \quad\vdots \\ \langle S(X_j),X_i\rangle = A_1^j\langle X_1,X_i\rangle + \dots + A_i^j\langle X_i,X_i\rangle + \dots + A_{n-1}^j\langle X_{n-1},X_i\rangle \\ \quad\vdots \\ \langle S(X_j),X_{n-1}\rangle = A_1^j\langle X_1,X_{n-1}\rangle + \dots + A_i^j\langle X_i,X_{n-1}\rangle + \dots + A_{n-1}^j\langle X_{n-1},X_{n-1}\rangle \end{array} \qquad (1.1.1)$$

denklem sistemi elde edilir. M hiperyüzey olduğundan $\|X_1\wedge \dots \wedge X_{n-1}\|^2 \neq 0$ dır. O halde yukardaki (1.1.1) denklem sisteminin çözümü tektir. Buradan

$$A_i^j = \frac{\begin{vmatrix} \langle X_1,X_1\rangle & \dots & \langle X_{i-1},X_1\rangle & \langle S(X_j),X_1\rangle & \langle X_{i+1},X_1\rangle & \dots & \langle X_{n-1},X_1\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle X_1,X_i\rangle & \dots & \langle X_{i-1},X_i\rangle & \langle S(X_j),X_i\rangle & \langle X_{i+1},X_i\rangle & \dots & \langle X_{n-1},X_i\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle X_1,X_{n-1}\rangle & \dots & \langle X_{i-1},X_{n-1}\rangle & \langle S(X_j),X_{n-1}\rangle & \langle X_{i+1},X_{n-1}\rangle & \dots & \langle X_{n-1},X_{n-1}\rangle \end{vmatrix}}{\|X_1\wedge X_2\wedge \dots \wedge X_{n-1}\|^2}$$

bulunur. det A = det A^T olduğundan

$$A_i^j = \frac{\begin{vmatrix} \langle X_1,X_1\rangle & \dots & \langle X_1,X_i\rangle & \dots & \langle X_1,X_{n-1}\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle X_{i-1},X_1\rangle & \dots & \langle X_{i-1},X_i\rangle & \dots & \langle X_{i-1},X_{n-1}\rangle \\ \langle S(X_j),X_1\rangle & \dots & \langle S(X_j),X_i\rangle & \dots & \langle S(X_j),X_{n-1}\rangle \\ \langle X_{i+1},X_1\rangle & \dots & \langle X_{i+1},X_i\rangle & \dots & \langle X_{i+1},X_{n-1}\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle X_{n-1},X_1\rangle & \dots & \langle X_{n-1},X_i\rangle & \dots & \langle X_{n-1},X_{n-1}\rangle \end{vmatrix}}{\|X_1\wedge X_2\wedge \dots \wedge X_{n-1}\|^2}$$

olur. Tanım (1.1.4) den

$$A_i^j = \frac{\langle X_1\wedge\ldots\wedge X_{i-1}\wedge S(X_j)\wedge X_{i+1}\wedge\ldots\wedge X_{n-1},\ X_1\wedge\ldots\wedge X_{n-1}\rangle}{\|X_1\wedge\ldots\wedge X_{n-1}\|^2}$$

elde edilir. M'nin yönünü neğatif seçip aynı işlemleri tekrarlarsak,

$$-A_i^j = \frac{\langle X_1\wedge\ldots\wedge X_{i-1}\wedge S(X_j)\wedge X_{i+1}\wedge\ldots\wedge X_{n-1},\ X_1\wedge\ldots\wedge X_{n-1}\rangle}{\|X_1\wedge\ldots\wedge X_{n-1}\|^2}$$

ve

$$S = \left[-A_i^j\right]$$

bulunur.

TANIM 1.1.5 (Ortalama eğrilik fonksiyonu):

M, E^n de bir hiperyüzey ve M' nin Weingarten dönüşümü S olsun.

$$\begin{aligned} H: M &\longrightarrow IR \\ p &\longrightarrow H(p) = \frac{1}{(n-1)}(\text{İz } S_p) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna, Ortalama eğrilik fonksiyonu denir.

TANIM 1.1.6 (alterne fonksiyon):

V, n-boyutlu bir vektör uzayı olsun.

$$f: V\times V\times\ldots\times V \xrightarrow{p\text{-lineer}} IR$$

$$(X_1,\ldots,X_i,\ldots,\underset{X_j}{\ldots},X_p) \longrightarrow f(X_1,\ldots,X_i,\ldots,\underset{X_j}{\ldots},X_p)$$

$$= \begin{cases} 0 & ,\ i=j \\ f(x_1,\ldots,X_p) & ,\ i\neq j \end{cases}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonuna alterne fonksiyon denir.

TEOREM 1.1.3 :

M, E^n de bir hiperyüzey ve S, M ' nin Weingarten dönüşümü olmak üzere;

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_1 \wedge \ldots \wedge X_{i-1} \wedge S(X_i) \wedge X_{i+1} \wedge \ldots \wedge X_{n-1} = (n-1) H \, X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}$$

dir.

İSPAT :

Teorem (1.1.2) den

$$S(X_i) = -\sum_j A_j^i X_j \; .$$

$$\sum_i X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_{i-1} \wedge S(X_i) \wedge X_{i+1} \wedge \ldots \wedge X_{n-1}$$

$$= \sum_i X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_{i-1} \wedge \Big(-\sum_j A_j^i\Big) X_j \wedge X_{i+1} \wedge \ldots \wedge X_{n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (-A_j^i) X_1 \wedge \ldots \wedge X_{i-1} \wedge X_j \wedge X_{i+1} \wedge \ldots \wedge X_{n-1}$$

dış çarpım alterne olduğundan

$$= \text{İz} S \; X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}$$

$$= (n-1) \, H \, X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}$$

bulunur.

TANIM 1.1.7(Gauss eğrilik fonksiyonu):

M , E^n de bir hiperyüzey ve S de M ' nin Weingarten dönüşümü olsun.

$$K : M \longrightarrow IR$$
$$p \longrightarrow K(p) = \det S_p$$

şeklinde tanımlı K fonksiyonuna M ' nin Gauss eğrilik fonksiyonu denir [2].

TEOREM 1.1.4 :

M , E^n de bir hiperyüzey, M ' nin Weingarten dönüşümü S ve vektor alanları uzayı $\mathcal{X}(M)$ olsun. $\mathcal{X}(M)$ nin bir bazı $\{X_i : 1 \leq i \leq n-1\}$ ise;

$$S(X_1) \wedge S(X_2) \wedge \dots \wedge S(X_{n-1}) = K x X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1} \quad .$$

İSPAT :

Teorem (1.1.2) den

$$S(X_i) = \sum_{J_i=1}^{n-1} (-A_i^{J_i}) X_{J_i} \quad .$$

$$S(X_1) \wedge \dots \wedge S(X_{n-1}) = (-1)^{n-1} \sum_{J_1 \dots J_{n-1}}^{n-1} A_1^{J_1} \dots A_{n-1}^{J_{n-1}} X_{J_1} \wedge \dots \wedge X_{J_{n-1}}$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} S(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \dots A_{n-1}^{\sigma(n-1)} X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}$$

dır. Diğer taraftan

$$\det S = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} (-1)^{n-1} S(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \dots A_{n-1}^{\sigma(n-1)} = K$$

olduğundan

$$S(X_1) \wedge S(X_2) \wedge \dots \wedge S(X_{n-1}) = K \times X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_{n-1}$$

olur

TEOREM 1.1.5 :

E^n de bir hiperyüzey M ve $\mathcal{X}(M)$ nin bir bazı $\{X_i : 1 \leq i \leq n-1\}$ olsun. Eğer bu baz ortagonal ise

$$S = \frac{-1}{\|X_1\| \|X_2\| \dots \|X_{n-1}\|} \left[\frac{\det \begin{bmatrix} X_{ij} \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix}}{\|X_i\|^2} \right]$$

dir.

İSPAT :

$S(X_j) \in \mathcal{X}(M)$ olduğundan

$$S(X_j)=a_{1j}X_1+a_{2j}X_2+\dots+a_{ij}X_i+\dots+a_{(n-1)j}X_{n-1}$$

şeklinde yazabiliriz. Eşitliğin her iki tarafını X_i ile çarpıp bazın ortogonal olduğunu gözönünde tutarsak;

$$\langle S(X_j) , X_i \rangle = a_{ij} \langle X_i , X_i \rangle$$

bulunur. Buradan da

$$a_{ij} = \frac{\langle S(X_j) , X_i \rangle}{\|X_i\|^2} \qquad (1.1.2)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\langle N , X_i \rangle = 0$$

eşitliğinin X_j yönünde türevi alınırsa;

$$D_{X_j}\langle N , X_i \rangle = \langle D_{X_j} N , X_i \rangle + \langle N , D_{X_j} X_i \rangle = 0$$

olur. Buradan $D_{X_j}X_i=X_{ij}$ alırsak;

$$\langle S(X_j), X_i \rangle = - \langle N , X_{ij} \rangle$$

bulunur.

$$N=\frac{X_1\wedge X_2\wedge\dots\wedge X_{n-1}}{\|X_1\wedge\dots\wedge X_{n-1}\|}=\frac{X_1\wedge X_2\wedge\dots\wedge X_{n-1}}{\|X_1\|\dots\|X_{n-1}\|}$$

olduğundan

$$\langle S(X_j),X_i \rangle = \langle -\frac{X_1\wedge X_2\dots\wedge X_{n-1}}{\|X_1\|\dots\|X_{n-1}\|} , X_{ij} \rangle$$

dir. $X_1 , X_2 , X_3 , \dots , X_{n-1} \in \mathcal{X}(E^n)$ olmak üzere

$$\psi (X_{ij})= \det \begin{bmatrix} X_{ij} \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} = \langle \psi(X_{ij}), X_1\wedge\dots\wedge X_{n-1} \rangle$$

olacak şekilde bir $\psi\in\Lambda^1(E^n)$ ve birtek $X_1\wedge\dots\wedge X_{n-1}$ vardır [4].

Böylece

$$\langle S(X_j), X_i \rangle = \frac{-1}{\|X_1\| \ldots \|X_{n-1}\|} \det \begin{bmatrix} X_{ij} \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir. O halde

$$a_{ij} = \frac{-1}{\|X_1\| \ldots \|X_{n-1}\| \; \|X_i\|^2} \det \begin{bmatrix} X_{ij} \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix}$$

olur. Buradan da

$$S = \frac{-1}{\|X_1\| \ldots \|X_{n-1}\|} \left[\frac{\det \begin{bmatrix} X_{ij} \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix}}{\|X_i\|^2} \right]$$

bulunur ∎

1.2 CHRİSTOFFEL SEMBOLLERİ

TANIM 1.2.1 (Christoffel Sembolleri):

M, E^n de parametrik denklemi

$$X: E^{n-1} \longrightarrow E^n$$
$$(u_1, \dots, u_{n-1}) \longrightarrow X(u_1, \dots, u_{n-1})$$

olan, bir hiperyüzey olsun. $X_i = \dfrac{\partial X}{\partial u_i}$ olmak üzere $\mathcal{X}(M)$ nin bir bazını $\{X_i : 1 \le i \le n-1\}$ olarak seçelim. X_i vektör alanlarının X_j yönünde kovaryant türevini alırsak; X_{ij}-yi $\{X_1, \dots, X_{n-1}, N\}$, cinsinden ifade edebiliriz. Öyleki;

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^{k} X_k - \langle S(X_j), X_i \rangle N .$$

Burada ki Γ_{ij}^{k} katsayılarına Christoffel Sembolleri denir [2].

TEOREM 1.2.1 :

M, E^n de parametreleri $(u_1, \dots, u_{n-1})$, parametrik denklemi;

$$X: E^{n-1} \longrightarrow E^n$$
$$(u_1, \dots, u_{n-1}) \longrightarrow X(u_1, \dots, u_{n-1})$$

olan bir hiperyüzey olsun. $\dfrac{\partial X}{\partial u_i} = X_i$ olmak üzere, M ' nin vektör alanları uzayı $\mathcal{X}(M)$ ' nin bir bazını da $\{X_i : 1 \le i \le n-1\}$ olarak alalım. $\dfrac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = X_{ij}$ için $\mathcal{X}(M)$ nin Chrristoffel Sembolleri, $1 \le i, j, k \le n-1$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\langle X_1 \wedge \dots \wedge X_{k-1} \wedge X_{ij} \wedge X_{k+1} \wedge \dots \wedge X_{n-1}, X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1} \rangle}{\| X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1} \|^2}$$

dir.

İSPAT :

$X_{ij} \in \mathcal{X}(E^n)$ olduğundan tanım (1.2.1) den

$$X_{ij} = \Gamma_{ij}^{1} X_1 + \Gamma_{ij}^{2} X_2 + \dots + \Gamma_{ij}^{n-1} X_{n-1} + A_{ij} N$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafını, sırayla, $X_1, \dots, X_{n-1}$ ile çarparsak;

$$\begin{array}{lcccccc}
\langle X_{ij}, X_1 \rangle = & \Gamma_{ij}^{1} \langle X_1, X_1 \rangle & + \dots + & \Gamma_{ij}^{k} \langle X_k, X_1 \rangle & + \dots + & \Gamma_{ij}^{n-1} \langle X_{n-1}, X_1 \rangle \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\langle X_{ij}, X_k \rangle = & \Gamma_{ij}^{1} \langle X_1, X_k \rangle & + \dots + & \Gamma_{ij}^{k} \langle X_k, X_k \rangle & + \dots + & \Gamma_{ij}^{n-1} \langle X_{n-1}, X_k \rangle \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\langle X_{ij}, X_{n-1} \rangle = & \Gamma_{ij}^{1} \langle X_1, X_{n-1} \rangle & + \dots + & \Gamma_{ij}^{k} \langle X_k, X_{n-1} \rangle & + \dots + & \Gamma_{ij}^{n-1} \langle X_{n-1}, X_{n-1} \rangle
\end{array}$$

denklem sistemini elde ederiz. $\mathcal{X}(M)$ nin bir bazı $\{X_i : 1 \leq i \leq n-1\}$ ve M bir hiperyüzey olduğundan $\| X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1} \|^2 \neq 0$ dır. Bu nedenle yukardaki denklem sisteminin çözümü tektir. Böylece Cramer kuralı uygulandığında;

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\begin{vmatrix} \langle X_1, X_1 \rangle & \cdots & \langle X_{k-1}, X_1 \rangle & \langle X_{ij}, X_1 \rangle & \langle X_{k+1}, X_1 \rangle & \cdots & \langle X_{n-1}, X_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle X_1, X_k \rangle & \cdots & \langle X_{k-1}, X_k \rangle & \langle X_{ij}, X_k \rangle & \langle X_{k+1}, X_k \rangle & \cdots & \langle X_{n-1}, X_k \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle X_1, X_{n-1} \rangle & \cdots & \langle X_{k-1}, X_{n-1} \rangle & \langle X_{ij}, X_{n-1} \rangle & \langle X_{k+1}, X_{n-1} \rangle & \cdots & \langle X_{n-1}, X_{n-1} \rangle \end{vmatrix}}{\| X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1} \|^2}$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\begin{vmatrix} \langle X_1, X_1\rangle & \cdots & \langle X_1, X_{k-1}\rangle & \langle X_1, X_k\rangle & \langle X_1, X_{k+1}\rangle & \cdots & \langle X_1, X_{n-1}\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle X_{k-1}, X_1\rangle & \cdots & \langle X_{k-1}, X_{k-1}\rangle & \langle X_{k-1}, X_k\rangle & \langle X_{k-1}, X_{k-1}\rangle & \cdots & \langle X_{k-1}, X_{n-1}\rangle \\ \langle X_{ij}, X_1\rangle & \cdots & \langle X_{ij}, X_{k-1}\rangle & \langle X_{ij}, X_k\rangle & \langle X_{ij}, X_{k+1}\rangle & \cdots & \langle X_{ij}, X_{n-1}\rangle \\ \langle X_{k+1}, X_1\rangle & \cdots & \langle X_{k+1}, X_{k-1}\rangle & \langle X_{k+1}, X_k\rangle & \langle X_{k+1}, X_{k+1}\rangle & \cdots & \langle X_{k+1}, X_{n-1}\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle X_{n-1}, X_1\rangle & \cdots & \langle X_{n-1}, X_{k-1}\rangle & \langle X_{n-1}, X_k\rangle & \langle X_{n-1}, X_{k+1}\rangle & \cdots & \langle X_{n-1}, X_{n-1}\rangle \end{vmatrix}}{\|X_1\wedge \quad \wedge X_{n-1}\|^2} \tag{1.2.1}$$

ve lemma (1.1.1) den

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\langle X_1\wedge\ldots\wedge X_{k-1}\wedge X_{ij}\wedge X_{k+1}\wedge\ldots\wedge X_{n-1}, X_1\wedge X_2\wedge\ldots\wedge X_{n-1}\rangle}{\|X_1\wedge\ldots\wedge X_{n-1}\|^2}$$

elde edilir

Buradan aşağıdaki sonuçları söyleyebiliriz:

SONUÇ 1.2.1 :

$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$ dır.

İSPAT :

Γ_{ij}^{k} daki X_{ij} yerine X_{ji} alınabileceğinden $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$ olur.

SONUÇ 1.2.2 :

Eğer $\mathcal{X}(M)$ nin $\{X_i : 1 \leq i \leq n-1\}$ bazı ortogonal (yani M ' nin eğrilik çizgileri parametre eğrileri) ise;

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\langle X_{ij}, X_k\rangle}{\|X_k\|^2}$$

dir.

İSPAT :

(1.2.1) eşitliğinde, bazın ortogonal olduğu gözönüne alınırsa;

$$
\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\begin{vmatrix}
\langle X_1, X_1\rangle & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & \langle X_{k-1}, X_{k-1}\rangle & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\langle X_{ij}, X_1\rangle & 0 & \cdots & 0 & \langle X_{ij}, X_k\rangle & 0 & \cdots & 0\ \langle X_{ij}, X_{n-1}\rangle \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\ \langle X_{k+1}, X_{k+1}\rangle & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\ \langle X_{n-1}, X_{n-1}\rangle
\end{vmatrix}}{\| X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \|^2}
$$

Yukardaki determinantı k-yıncı sütuna göre açarsak k-yıncı kofaktör hariç diğerleri sıfır olur. Ayrıca baz ortogonal olduğundan $\| X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \|^2 = \| X_1\|^2 \, \|X_2\|^2 \ldots \|X_{n-1}\|^2$. Böylece

$$
\Gamma_{ij}^{k} = (-1)^{k+k} \frac{\|X_1\|^2 \ldots \|X_{k-1}\|^2 \, \|X_{k+1}\|^2 \ldots \|X_{n-1}\|^2}{\|X_1\|^2 \ldots \|X_k\|^2 \ldots \|X_{n-1}\|^2} \langle X_{ij} , X_k\rangle
$$

ve

$$
\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\langle X_{ij} , X_k \rangle}{\|X_k\|^2}
$$

elde edilir.

BÖLÜM 2

2.1 MİNİMAL YÜZEYLER

TANIM 2.1.1 (Minimal Yüzey):

M, E^3 de parametreleri u,v ve parametrik denklemi

$$X: U \subset E^2 \longrightarrow E^3$$
$$(u,v) \longrightarrow X(u,v)$$

olan bir yüzey olsun. Eğer M' nin H ortalama eğrilik fonksiyonu $\forall P \in M$ için özdeş olarak sıfır ise; M' ye bir minimal yüzey denir [5] .

Bu cins yüzeylere neden minimal adının verildiğini açıklamak için, varyasyon bilgisine ihtiyacımız vardır. Bu nedenle, aşağıdaki tanımı vermek uygun olur.

TANIM 2.1.2:

$$g: [a,b] \subset IR \longrightarrow IR$$

fonksiyonu verilsin. [a,b] aralığının parçalanışları

$$P_j = \{ a = X_0^j \leq X_1^j \leq \dots \leq X_n^j = b \}, \ j \in I$$

olsun.

$$W_j = \sum_{i=1}^{n} |g(X_i^j) - g(X_{i-1}^j)|$$

toplamını gözönüne alalım.

$$\text{Sup} \{W_j\} = \text{Sup} \{ \sum_{i=1}^{n} | g(X_i^j) - g(X_{i-1}^j) | : 0 \leq i \leq n \}, j \in I$$

değerine g fonksiyonunun [a,b] aralığındaki varyasyonu denir [6] .

$$h(\bar{D}) = g([a,b])$$

olacak şekilde

$$h: \bar{D} \longrightarrow IR$$

fonksiyonu ve

$$\psi : \bar{D}x(-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow E^3$$
$$(u,v,t) \longrightarrow \Psi(u,v,t)=X^t(u,v)=X(u,v)+thN$$

fonksiyonunu seçersek; $h(\bar{D}) = g([a,b])$ fonksiyonunun varyasyonuna bağlı olarak, $\psi(u,v,t)$ fonksiyonu da N yönünde bir varyasyona sahip olur. Ψ fonksiyonunun N yönündeki bu varyasyonuna $X(\bar{D})$ bölgesinin normal varyasyonu denir.

$$X: U \subset E^2 \longrightarrow E^3$$

Parametrik yüzeyini alalım. U' nun sınırlı bir D bölgesini ve $\bar{D} = D \cup \partial D$ olmak üzere

$$h: \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonunu seçelim. $X(\bar{D})$' nin

$$\psi: \bar{D}x(-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow E^3$$
$$(u,v,t) \longrightarrow \Psi(u,v,t)=X^t(u,v)=X(u,v)+thN$$

dönüşümü ile belirtilen normal varyasyonu,

$$X_u^t = X_u + thS(X_u) + th_u N$$

$$X_v^t = X_v + thS(X_v) + th_v N$$

parametre çizgileri ile birlikte bir parametrik yüzey olur.

$\{X_u, X_v, N\}$ sistemi $\mathcal{X}(E^3)$ için bir baz olunca,

$$\{X_v \wedge N,\ N \wedge X_u,\ X_u \wedge X_v\}$$

sistemi de $\Lambda^2(E^3)$ için baz olur. Buna göre

$$X_u^t \wedge X_v^t = (1-2thH+t^2h^2K)X_u \wedge X_v + [th_u + t^2(h_v A_1^1 + h_u A_1^2)]X_u \wedge N$$
$$+ [-th_v + t^2(h_v A_2^1 + h_u A_2^2)]\ X_v \wedge N .$$

$X_u^t \wedge X_v^t \in \Lambda^2(E^3)$ ve Lemma(1.1.1) den

$$\| X_u^t \wedge X_v^t \|^2 = (1-4thH)\ \| X_u \wedge X_v \|^2 + R(t)$$

bulunur. Burada $R(t)$, t-ye göre lineer olmayan terimleri göstermektedir. $-\varepsilon < t < \varepsilon$ olduğundan,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R(t) = 0 \qquad (2.1.1)$$

olur.

$$\| X_u^t \wedge X_v^t \| = \sqrt{(1-4thH) \| X_u \wedge X_v \|^2 + R(t)}$$

(2.1.1) den

$$\| X_u^t \wedge X_v^t \| = \sqrt{(1-4thH)} \; \| X_u \wedge X_v \|$$

elde edilir.

Diğer taraftan $X^t(\overline{D})$' nın $A(t)$ alanı

$$A(t) = \int_{\overline{D}} \| X_u^t \wedge X_v^t \| \, du \, dv$$

$$= \int_{\overline{D}} \sqrt{(1-4thH)+\overline{R(t)}} \; \| X_u \wedge X_v \| \, du \, dv$$

olur. Burada $\overline{R(t)} = \dfrac{R(t)}{\| X_u \wedge X_v \|^2}$ dir. (2.1.1) den $\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{R(t)} = 0$, $\varepsilon \to 0$ yaklaşımında $t \to 0$ olur. Dolayısı ile $A(t)$ alan fonksiyonu diferensiyellenebilirdir.

Böylece

$$A'(t) = \int_{\overline{D}} \frac{-2hH}{\sqrt{1-4thH}} \; \| X_u \wedge X_v \| \, du \, dv$$

ve

$$A'(0) = \left(\int_{\overline{D}} \frac{-2hH}{\sqrt{1-4thH}} \; \| X_u \wedge X_v \| \, du \, dv \right) \Bigg|_{t=0}$$

$$= \int_{\overline{D}} -2hH \, \| X_u \wedge X_v \| \, du \, dv$$

bulunurki bu da [5] deki ifadedir.

Şimdi minimal yüzeylerle normal varyasyon arasındaki bağıntıyı karekterize eden, şu teoremi verebiliriz:

TEOREM 2.1.1:

$$X: U \subset E^2 \longrightarrow E^3$$

parametrik denklemi bir M yüzeyi belirtsin ve U da sınırlı bir bölge D olsun. M' nin minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart, D' ye karşılık gelen $X(\bar{D})$ bölgelerinin normal varyasyonları için $A'(0) = 0$ olmasıdır.

İSPAT:

Yüzey minimal ise $H \equiv 0$ ve (2.1.2) den

$$A'(0) = \int_{\bar{D}} -2hH \| X_u \wedge X_v \| \, du \, dv = 0 \qquad (2.1.3)$$

olduğu açıktır.

Tersine; $A'(0) = 0$ olsun. Farzedelimki bazı $q \in D$ için $H(q) \neq 0$ dır. $h(q)=H(q)$ ve q nun küçük bir komşuluğu dışında özdeş olarak sıfır olacak şekilde bir

$$h: \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu seçelim. O zaman

$$A'(0) = \int_{\bar{D}} -2H^2 \| X_u \wedge X_v \| du \, dv < 0$$

dır. Bu ise $A'(0) = 0$ olması ile çelişir. O halde böyle $q \in D$ noktaları yoktur ve $H \equiv 0$ dır [5] .

Böylece bir minimal yüzeyin herhangi bir $X(\bar{D})$ sınırlı bölgesi, bu bölgenin normal varyasyonunun alan fonksiyonu için, bir kritik noktadır. Burada bu kritik noktanın, bir minimum nokta olmayabileceği de bilinecektir.

TANIM 2.1.3 (İzotermal parametreli yüzey)

$$X: U \subset E^2 \longrightarrow E^3$$
$$(u , v) \longrightarrow X(u,v)$$

denklemi bir parametrik yüzey belirtsin. Eğer

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \quad ; \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

ise u,v parametrelerine izotermal parametre, yüzeye de izotermal parametreli yüzey denir [5] .

TEOREM 2.1.2:

$$X:\ U \subset E^2 \longrightarrow E^3$$

yüzeyi izotermal parametreli yüzey olsun. $\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = X_{uu}$

$\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = X_{vv}$ olmak üzere

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 H N$$

dir. Burada $\lambda = \| X_u \| = \| X_v \|$.

İSPAT:

Bu ispatı kendi metodumuz olan bir diğer yoldan yapalım: X izotermal olduğundan;

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \quad ; \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0 \quad .$$

$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ den X_u yönünde türev alırsak,

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle \tag{2.1.4}$$

ve $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ dan X_v yönünde türev alırsak;

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle = 0$$

$$\langle X_{uu}, X_v \rangle = -\langle X_{uv}, X_u \rangle \tag{2.1.5}$$

bulunur. (2.1.5) eşitliğini (2.1.4) de yerine yazarsak;

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = -\langle X_{vv}, X_u \rangle$$

$$\langle X_{uu}+X_{vv}, X_u \rangle = 0 \qquad (2.1.6)$$

olur. Aynı şekilde $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ den X_v yönünde türev alırsak;

$$\langle X_{uv}, X_u \rangle = \langle X_{vv}, X_v \rangle \qquad (2.1.7)$$

ve $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ dan X_u yönünde türev alırsak;

$$\langle X_{uu}, X_v \rangle = - \langle X_{uv}, X_u \rangle \qquad (2.1.8)$$

bulunur. (2.1.8) eşitliğini (2.1.7) de yerine yazarsak;

$$\langle X_{uu}+X_{vv}, X_v \rangle = 0 \qquad (2.1.9)$$

elde ederiz. Diğer taraftan $X_{uu}+X_{vv}$ vektörü N ye paraleldir. Çünkü; X izotermal olduğundan Teorem (1.1.5) den $n=3$ alınırsa,

$$S = \frac{1}{\lambda^4} \left[\det \begin{bmatrix} X_{ij} \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right] \qquad 1 \leq i,j \leq 2$$

dır. $1 = u$, $2 = v$ alınırsa;

$$2H = \frac{1}{\lambda^4} \det \begin{bmatrix} X_{uu}+X_{vv} \\ X_u \\ X_v \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda^2} \langle X_{uu}+X_{vv}, N \rangle$$

elde edilir. Buradan da

$$2\lambda^2 H = \langle X_{uu}+X_{vv}, N \rangle \qquad (2.1.10)$$

bulunur. Bu da (2.1.6) ve(2.1.9) dan $X_{uu}+X_{vv}$ vektör alanının

N vektör alanına paralel olması demektir. Böylece

$$X_{uu}+X_{vv} = tN \tag{2.1.11}$$

yazabiliriz. Bu eşitliğin her iki tarafını N ile çarparsak;

$$\langle X_{uu}+X_{vv}, N \rangle = t$$

(2.1.10) eşitliğinden $t = 2\lambda^2 H$ ve (2.1.11) den

$$2\lambda^2 HN = X_{uu}+X_{vv}$$

bulunur.

TANIM 2.1.4 (Harmonik fonksiyon):

$$\begin{aligned} f: U \subset E^2 &\longrightarrow IR \\ (u, v) &\longrightarrow f(u,v) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$$

özeliğini sağlıyorsa f ye harmonik fonksiyon denir [5].

SONUÇ 2.1.1:

$$\begin{aligned} X: U \subset E^2 &\longrightarrow E^3 \\ (u, v) &\longrightarrow X(u,v) = (X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

Parametrik denklemi, bir izotermal parametreli yuzey belirtsin. Bu taktirde X yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart; X_1, X_2, X_3 koodinat fonksiyonları - nın harmonik olmasıdır.

İSPAT:

X izotermal olduğundan ve teorem (2.1.2) den

$$X_{uu}+X_{vv} = 2\lambda^2 HN \tag{2.1.12}$$

bağıntısı geçerlidir. Şimdi; kabuledelim ki X minimal olsun. O zaman;

$$X_{uu}+X_{vv} \equiv 0$$

dır. Bu özdeşlikten

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X_i}{\partial v^2} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq 3$$

bulunur ki bu da X_i ,$(1 \leq i \leq 3)$ fonksiyonlarının harmonik olması demektir.

Tersine; X_1, X_2, X_3 harmonik olsun. Bu taktirde

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X_i}{\partial v^2} = 0 \quad ,$$

$$X_{uu}+X_{vv} \equiv 0$$

olur. (2.1.12) den $H \equiv 0$ elde edilir. O halde X minimaldır [5].

Yukardaki sonuçtan, X minimal ise X_1, X_2, X_3 koordinat fonksiyonları harmoniktir. X_j harmonik fonksiyonu için

$$\phi_j(z) = X_j+iY_j \quad , \quad 1 \leq j \leq 3$$

olacak şekilde $\phi_j(z)$ analitik fonksiyonu ve Y_j harmonik fonksiyonu vardır. Böyle Y_j harmonik fonksiyonları da bir minimal yüzey belirtirler. Bu minimal yüzeye X'e eşlenik minimal yüzey denir.

$$\phi_j(z) = X_j+iY_j$$

analitik olduğundan Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar. Yani

$$\frac{\partial X_j}{\partial u} = \frac{\partial Y_j}{\partial v}$$

$$\frac{\partial X_j}{\partial v} = - \frac{\partial Y_j}{\partial u} \quad , \quad 1 \leq j \leq 3$$

dir. Böylece

$$X_u = Y_v \ , \ X_v = -Y_u \tag{2.1.13}$$

bulunur.

TEOREM 2.1.3:

X ve Y iki eşlenik minimal yüzey olsunlar. Bu taktirde X ve Y nin Weingarten dönüşümleri sırayla, S_X ve S_Y ise

$$S_X = adS_Y$$

ve

$$K_X = K_Y$$

dir.

İSPAT :

(1.1.2) den izotermal yüzeyler için

$$a_{ij} = \frac{1}{\lambda^2} \langle S(X_i) \ , \ X_j \rangle$$

olur. Buradan da

$$S = \frac{1}{\lambda^2} \langle S(X_i) \ , \ X_j \rangle \quad , \quad 1 \leq i,j \leq 2$$

ve $1 = u$, $2 = v$ alınırsa, X için ;

$$S_X = \frac{1}{\lambda^2} \begin{bmatrix} \langle S(X_u), X_u \rangle & \langle S(X_u), X_v \rangle \\ \langle S(X_u), X_v \rangle & \langle S(X_v), X_v \rangle \end{bmatrix} \tag{2.1.14}$$

bulunur. X ve Y izotermal ve eşlenik olduğundan (2.1.13) den

$$S_X = \frac{1}{\lambda^2}\begin{bmatrix} \langle \bar{S}(Y_v), Y_v \rangle & -\langle \bar{S}(Y_v), Y_u \rangle \\ -\langle \bar{S}(Y_v), Y_u \rangle & \langle \bar{S}(Y_u), Y_u \rangle \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$S_X = adS_Y$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın determinantını alırsak;

$$\det(S_X) = \det(adS_Y)$$

bulunur. nxn tipindeki bir matris için;

$$(\det A)^{n-1} = \det(adA)$$

olduğundan, n = 2 alınırsa,

$$\det A = \det(adA)$$

olur. Buradan da

$$K_X = \det S_X = \det(adS_Y) = \det S_Y = K_Y$$

elde edilir.

LEMMA 2.1.4:

$$\begin{aligned} X: U\subset E^2 &\longrightarrow E^3 \\ (u, v) &\longrightarrow X(u,v) \end{aligned}$$

Parametrik denklemi, bir M yüzeyi belirtsin.

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{C} &\text{———} \mathbb{C}^3 \\ z &\text{———} \psi(z) = (\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z)) \\ &\qquad = X_u - iX_v \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ψ dönüşümünü gözönüne alalım. Bu tak- tirde M nin izotermal olması için gerek ve yeter şart

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$$

olmasıdır. Eğer yukardaki şart sağlanıyorsa; M nın minimal olması için gerek ve yeter şart ψ_i fonksiyonları - nın analitik olmasıdır.

ISPAT :

M, izotermal olsun. O zaman

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = \langle X_u - iX_v , X_u - iX_v \rangle = 0$$

dır.

Tersine; $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$ olsun. Bu durumda

$$\langle X_u , X_u \rangle - 2i \langle X_u , X_v \rangle - \langle X_v , X_v \rangle = 0$$

olur. Buradan da

$$\langle X_u , X_u \rangle - \langle X_v , X_v \rangle = 0$$

$$\langle X_u , X_u \rangle = \langle X_v , X_v \rangle$$

$$-2 \langle X_u , X_v \rangle = 0$$

$$\langle X_u , X_v \rangle = 0$$

bulunur ki bu da M yüzeyinin izotermal olması demektir.

M izotermal ve minimal olsun. Göstereceğiz ki ψ_1, ψ_2, ψ_3 fonksiyonları analitiktir.

İzotermal ve minimal yüzeyler için;

$$X_{uu} + X_{vv} \equiv 0$$

olduğundan

$$X_{uu} = -X_{vv}$$

$$(X_u)_u = (-X_v)_v$$

ve

$$(X_u)_v = -(-X_v)_u$$

dır. Böylece

$$\frac{\partial X_u^i}{\partial u} = -\frac{\partial X_v^i}{\partial v} \ , \quad 1 \leq i \leq 3 \qquad (2.1.15)$$

$$\frac{\partial X_u^i}{\partial v} = -\frac{\partial (-X_u^i)}{\partial u} \qquad (2.1.16)$$

olur ki, bu da ψ_1, ψ_2, ψ_3 fonksiyonlarının analitik olması demektir.

Tersine; ψ_i fonksiyonları analitik olsun. O zaman (2.1.15) ve (2.1.16) dan

$$X_{uu}+X_{vv} \equiv 0 \equiv 2\lambda^2 HN$$

olur. Bu da M nin izotermal ve minimal olması demektir [5] .

TANIM 2.1.5 (Minimal Eğri):

M , E^3 de bir yüzey, $I \subset IR$ olmak üzere

$$\alpha : I \longrightarrow M$$
$$t \longrightarrow \alpha(t)$$

şeklinde tanımlı α eğrisi için, $\alpha'(t) \neq 0$ iken, $\|\alpha'(t)\|^2 = 0$ ise α ya M üzerinde bir minimal eğri denir [7] .

TEOREM 2.1.5:

$$X: U \subset E^2 \longrightarrow E^3$$

dönüşümü, parametreleri u, v olan bir yüzey olsun. Bu taktirde yüzeyin ve parametre eğrilerinin minimal olması için gerek ve yeter şart;

$$2X = Y(u)+Z(v) \; , \quad \langle Y'(u), Y'(u) \rangle = 0 \; , \quad \langle Z' \, , Z' \rangle = 0$$

olmasıdır.

İSPAT :

Yüzey ve parametre eğrileri minimal olsun. O halde $\|X_u\|^2 = 0$ ve $\|X_v\|^2 = 0$, $H \equiv 0$. Teorem(1.1.2) den $n = 3$ ve $1 = u$, $2 = v$ alarak

$$2H = \frac{-\langle S(X_u) \wedge X_v + X_u \wedge S(X_v), X_u \wedge X_v \rangle}{\|X_u \wedge X_v\|^2} = 0$$

bulunur. Diğer taraftan $\langle S(X_u), X_v \rangle = \langle S(X_v), X_v \rangle$. Çünku $\langle S(X_u), X_v \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle = \langle S(X_v), X_u \rangle$ dır. Buradan da

$$2H = \frac{\langle S(X_u), X_v \rangle}{\langle X_u, X_v \rangle} \equiv 0$$

olduğundan

$$\langle S(X_u), X_v \rangle = 0$$

veya

$$\langle N \, , X_{uv} \rangle = 0 \tag{2.1.17}$$

olur. $\langle X_u, X_u \rangle = 0$ dan X_v yönünde türev alırsak;

$$\langle X_{uv}, X_u \rangle = 0 \; . \tag{2.1.18}$$

Aynı şekilde $\langle X_v, X_v \rangle = 0$ dan X_u yönünde türev alırsak;

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = 0 \tag{2.1.19}$$

dir. (2.1.17),(2.1.18),(2.1.19) ve $\{X_u, X_v, N\}$ sisteminin lineer bağımsız olmasından $X_{uv} = 0$ dır. Buradan da

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = 0 \,,$$

ve

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u\, \partial v} = 0 \,, \quad 1 \leq i \leq 3 \qquad (2.1.20)$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial X_i}{\partial v}\right) = 0$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = g(v)$$

$$X_i = Z_i(v) \qquad (2.1.21)$$

bulunur. Aynı şekilde (2.1.20) den

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} = f(u)$$

$$X_i = Y_i(u) \qquad (2.1.22)$$

elde edilir. (2.1.21) ve (2.1.22) den

$$2X_i = Y_i(u) + Z_i(v)$$

$$2X(u,v) = Y(u) + Z(v)$$

bulunur.

$$2X_u = Y'(u)$$

$$2X_v = Z'(v)$$

ve

$$4\,\|X_u\|^2 = \|Y'(u)\|^2 = 0$$

$$4\,\|X_v\|^2 = \|Z'(v)\|^2 = 0 \,.$$

Tersine;

$$2X = Y(u) + Z(v) \text{ ve } \|Y'(u)\|^2=0,\ \|Z'(v)\|^2=0 \qquad (2.1.23)$$

olsun. Göstereceğiz ki $H \equiv 0$ dır. (2.1.23) den,

$$X_u = \frac{1}{2} Y'(u)$$

$$X_v = \frac{1}{2} Z'(v)$$

$$X_{uv} = 0 \qquad (2.1.24)$$

$$\|X_u\|^2 = 0, \quad \|X_v\|^2 = 0 .$$

Böylece; Teorem(1.1.2) den

$$2H = \frac{\langle S(X_u), X_v \rangle}{\langle X_u, X_v \rangle} = \frac{1}{\langle X_u, X_v \rangle} \det \begin{bmatrix} X_{uv} \\ X_u \\ X_v \end{bmatrix}$$

olur. (2.1.24) den $H \equiv 0$ bulunur.

TANIM 2.1.6 (Minimal eğriler için Study'nın tabiî parametresi):

$$\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^3$$

eğrisi minimal, yani; $\alpha'(t) \neq 0$ iken $\|\alpha'(t)\|^2 = 0$ olsun.

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$$

eşitliğinden türev alırsak;

$$\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0 \qquad (2.1.25)$$

olur. Buradan tekrar türev alırsak;

$$\langle \alpha', \alpha''' \rangle = -\langle \alpha'', \alpha'' \rangle = -\|\alpha''\|^2 \qquad (2.1.26)$$

bulunur. (2.1.25) ve (2.1.26) dan

$$\| \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha''' \|^2 = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\|\alpha''\|^2 \\ 0 & \|\alpha''\|^2 & \langle \alpha'', \alpha''' \rangle \\ -\|\alpha''\|^2 & \langle \alpha'', \alpha''' \rangle & \|\alpha'''\|^2 \end{bmatrix}$$

$$= -\|\alpha''\|^2 (\|\alpha''\|^4) \qquad (2.1.27)$$

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle = \sqrt{-\|\alpha''\|^4} \; \|\alpha''\| \qquad (2.1.28)$$

olur. Aynı şekilde $\forall V \in T_{E^3}(\alpha(t))$ için,

$$\| \alpha' \wedge \alpha'' \wedge V \|^2 = -\langle \alpha, V \rangle^2 \|\alpha''\|^2 \qquad (2.1.29)$$

ve

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', V \rangle = \sqrt{-\langle \alpha', V \rangle^2} \; \|\alpha''\| \qquad (2.1.30)$$

bulunur. $\|\alpha''\| = 0$ olması (2.1.28) ve (2.1.30) dan

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle = 0 = \det \begin{bmatrix} \alpha' \\ \alpha'' \\ \alpha''' \end{bmatrix} \qquad \langle \alpha' \wedge \alpha'', V \rangle = \det \begin{bmatrix} \alpha' \\ \alpha'' \\ V \end{bmatrix} = 0$$

olmasıyla mümkündür. Bu ise α' ve α'' vektorlerinin lineer bağımlı olmasını gerektirir. α' ve α'' nün lineer bağımlı olması halini inceleme dışı bırakalım.

Eğer $\beta(p) = \alpha(t)$ parametre değişimi yaparsak

$$\alpha'(t) = \beta'(p)\, dp/dt$$

$$\alpha''(t) = \beta''(p) \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \beta'(p) \frac{d^2p}{dt^2} \qquad (2.1.31)$$

dır. Buradan da

$$\|\beta'(p)\| = 0$$

ve (2.1.31) den

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', V \rangle = \left(\frac{dp}{dt}\right)^3 \langle \beta' \wedge \beta'', V \rangle \qquad (2.1.32)$$

olur. Ayrıca;

$$\langle \alpha'(t), V \rangle = \frac{dp}{dt} \langle \beta'(p), V \rangle \qquad (2.1.33)$$

dır. Şimdi p parametresini öyle seçmiş olalım ki;

$$\langle \beta'(p) \wedge \beta''(p), V \rangle = -\langle \beta'(p), V \rangle \qquad (2.1.34)$$

olsun. O zaman

$$\frac{dp}{dt} = \mp \sqrt{\frac{-\langle \alpha' \wedge \alpha'', V \rangle}{\langle \alpha', V \rangle}}$$

veya

$$p = \mp \int \sqrt{\frac{-\langle \alpha' \wedge \alpha'', V \rangle}{\langle \alpha', V \rangle}}\, dt \qquad (2.1.35)$$

almalıyız ki (2.1.34) şartı sağlansın. Eğer t=p alırsak (2.1.34) den

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', V \rangle = -\langle \alpha', V \rangle$$

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'' + \alpha', V \rangle = 0$$

bulunur. $V \neq 0$ ve $\alpha' \wedge \alpha'' \neq 0$ olduğundan

$$\alpha' \wedge \alpha'' + \alpha' = 0$$

olmalıdır. Yani

$$\alpha' \wedge \alpha'' = -\alpha' \qquad (2.1.36)$$

olur.

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', V\rangle^2 = \det\begin{bmatrix}\alpha' \\ \alpha'' \\ V\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha' & \alpha'' & V\end{bmatrix} = \|\alpha' \wedge \alpha'' \wedge V\|^2 \qquad (2.1.37)$$

$$= -\langle \alpha', V\rangle^2 \|\alpha''\|^2$$

bulunur. Her iki tarafı $\langle \alpha', V\rangle^2$ 'ne bölersek

$$\frac{\|\alpha' \wedge \alpha'' \wedge V\|^2}{\langle \alpha', V\rangle^2} = -\|\alpha''\|^2$$

olur. Buradan da

$$\|\alpha''\|^2 = -1 \qquad (2.1.38)$$

bulunur. (2.1.36) dan ve (2.1.37) den

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha'''\rangle = -\langle \alpha', \alpha'''\rangle$$

$$= -(-\|\alpha''\|^2) = \|\alpha''\|^2 = -1.$$

Buradan

$$\det\begin{bmatrix}\alpha' \\ \alpha'' \\ \alpha'''\end{bmatrix} = -1$$

bulunur ki $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ vektörleri ortogonaldir.

(2.1.35) eşitliğindeki p parametresine Sutudy'nin tabiî parametresi denir [7] .

TANIM 2.1.7 (Minimal Yüzeyler için Sutudy Formülleri):

$$X: U \subset E^2 \longrightarrow E^3$$

bir yüzey belirtsin. Yüzeyin parametre eğrileri Y(u) ve Z(v) eğrileri olsunlar. u,v parametreleri yerine Tanım (2.1.6) daki Sutudy'nin p ve q parametrelerini kullanalım. O zaman Y(p) eğrisi için,

$$Y' \wedge Y'' = -Y', \quad \| Y'' \|^2 = -1 \tag{2.1.39}$$

ve Z(q) eğrisi için,

$$Z' \wedge Z'' = -Z', \quad \| Z'' \|^2 = -1 \tag{2.1.40}$$

bağıntıları geçerlidir.

$$2X = Y(u) + Z(v) = Y(p) + Z(q)$$

olduğundan

$$2X_p = Y', \quad 2X_q = Z'$$

dır. Buradan da

$$4X_p \wedge X_q = Y' \wedge Z'$$

$$\| Y' \wedge Z' \|^2 = \det \begin{bmatrix} \langle Y', Y' \rangle & \langle Y', Z' \rangle \\ \langle Y', Z' \rangle & \langle Z', Z' \rangle \end{bmatrix}$$

$$= -(\langle Y', Z' \rangle)^2 = (i \langle Y', Z' \rangle)^2 .$$

Böylece

$$\| Y' \wedge Z' \| = i \langle Y', Z' \rangle = 4 \| X_p \wedge X_q \|$$

ve

$$N = \frac{X_p \wedge X_q}{\| X_p \wedge X_q \|} = \frac{Y' \wedge Z'}{i \langle Y', Z' \rangle} = -i \frac{Y' \wedge Z'}{\langle Y', Z' \rangle}$$

$$N = -i \frac{Y' \wedge Z'}{\langle Y', Z' \rangle} \tag{2.1.41}$$

bulunur. Teorem (1.I.2)' den

$$A_1^1 = \frac{\langle S(X_p) \wedge X_q, X_p \wedge X_q \rangle}{\| X_p \wedge X_q \|^2}$$

$$= \frac{\det \begin{vmatrix} \langle S(X_p), X_p \rangle & \langle S(X_p), X_q \rangle \\ \langle X_p, X_q \rangle & \langle X_q, X_q \rangle \end{vmatrix}}{\| X_p \wedge X_q \|^2}$$

$$= \frac{\langle X_p, X_q \rangle \ \langle S(X_p), X_q \rangle}{-\langle X_p, X_q \rangle^2} = \frac{\langle S(X_p), X_q \rangle}{-\langle X_p, X_q \rangle} \tag{2.1.42}$$

olur. Diğer taraftan

$$\langle S(X_p), X_q \rangle = -\langle N, X_{pq} \rangle, \quad X_{pq} = 0$$

olduğundan ve (2.1.42) den

$$A_1^1 = 0$$

bulunur.

$$A_2^1 = \frac{\langle X_p \wedge S(X_p), X_p \wedge X_q \rangle}{-\langle X_p, X_q \rangle^2}$$

$$A_2^1 = \frac{\det \begin{vmatrix} \langle X_p, X_p \rangle & \langle X_p, X_q \rangle \\ \langle S(X_p), X_p \rangle & \langle S(X_p), X_q \rangle \end{vmatrix}}{-\langle X_p, X_q \rangle^2}$$

$$A_2^1 = \frac{\langle X_p,X_q\rangle \ \langle S(X_p),X_p\rangle}{\langle X_p,X_q\rangle} = \frac{\langle S(X_p),X_p\rangle}{\langle X_p\ ,\ X_q\rangle}$$

$$= \frac{-\langle N,X_{pp}\rangle}{\langle X_p,X_q\rangle} = 2i\ \frac{\langle Y' \wedge Z',Y''\rangle}{\langle Y',Z'\rangle^2} = 2i\frac{\langle Z',Y' \wedge Y''\rangle}{\langle Y',Z'\rangle^2}$$

$$= -\ 2i\ \frac{1}{\langle Y',Z'\rangle}\ ,$$

$$A_1^2 = \frac{\langle S(X_q) \wedge X_q, X_p \wedge X_q\rangle}{-\langle X_p,\ X_q\rangle^2}$$

$$A_1^2 = \frac{\det \begin{bmatrix} \langle S(X_q),X_p\rangle & \langle S(X_q),X_q\rangle \\ \langle X_p,X_q\rangle & \langle X_q\ ,X_q\rangle \end{bmatrix}}{-\langle X_p\ ,\ X_q\rangle^2}$$

$$= \frac{-\langle N,X_{qq}\rangle}{\langle X_p,X_q\rangle} = \frac{2i}{\langle Y',Z'\rangle}$$

ve

$$A_2^2 = \frac{\langle X_p \wedge S(X_q),X_p \wedge\ X_p\rangle}{-\ \langle X_p,\ X_q\rangle^2}$$

$$= \frac{\det \begin{bmatrix} \langle X_p,X_p\rangle & \langle X_p,X_q\rangle \\ \langle S(X_q),X_p\rangle & \langle S(X_q),X_q\rangle \end{bmatrix}}{-\langle X_p\ ,\ X_q\rangle^2}$$

$$A_2^2 = \frac{\langle S(X_q) \, , X_p \rangle}{\langle X_p \, , X_q \rangle} = \frac{-\langle N \, , X_{pq} \rangle}{\langle X_p \, , X_q \rangle}$$

elde edilir. Ayrıca

$$X_{pq} = \vec{0}$$

olduğundan

$$A_2^2 = 0$$

bulunur. Buradan da $1 \leq i, j \leq 2$ olmak üzere

$$S = \left[-A_i^j \right] = \begin{bmatrix} -A_1^1 & -A_2^1 \\ -A_1^2 & -A_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2i}{\langle Y', Z' \rangle} \\ \dfrac{-2i}{\langle Y', Z' \rangle} & 0 \end{bmatrix}$$

dir. $K = \det S = \dfrac{-4}{\langle Y', Z' \rangle^2}$, $\text{İz} S = 0$ bulunur. Buradan

$$S^t = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-2i}{\langle Y', Z' \rangle} \\ \dfrac{2i}{\langle Y', Z' \rangle} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^* = \overline{S}^t = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{2i}{\langle Y',Z' \rangle} \\ \dfrac{-2i}{\langle Y',Z' \rangle} & 0 \end{vmatrix} = S$$

olur. $S^* = S$ olduğundan bu matris bir Hermit matrisidir. Dolayısıyla S nin karekteristik değerleri reeldir. Bu nedenle $2X(u,v) = Y(u) + Z(v)$ şeklindeki minimal parametreli minimal yüzeylere reel minimal yüzeyler de denir.

2.2 MİNİMAL YÜZEYLER VE EULER TEOREMİ

TANIM 2.2.1:

M, E^n de bir hiperyüzey olsun. $\forall p \in M$ için $V_p \in T_M(p)$ tanjant vektörü birim uzunluklu olmak üzere

$$k_n(V_p) = \langle S_p(V_p), V_p \rangle$$

şeklinde tanımlı

$$k_n : T_M(p) \longrightarrow IR$$

fonksiyonuna M nin V_p yönündeki normal eğriliği denir [8].

TEOREM 2.2.1(Yüzeyler için Euler Teoremi):

M, E^3 de bir yüzey olsun. Umbilik olmayan bir $p \in M$ noktası alalım. p noktasında bir birim tanjant vektor V_p olsun. k_1, k_2 ve X_1, X_2, sırasıyla asli eğrilikleri ve bunlara karşılık gelen asli vektorleri göstersin. Bu durumda

$$k_n(V_p) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

dır [8].

SONUÇ 2.2.1 :

M, E^3 de bir minimal yüzey; k_1, k_2 ve X_1, X_2 sırasıyla asli eğrilikler ve bunlara karşılık gelen asli vektörler olsun. $V_p \in T_M(p)$ olmak üzere

$$k_n(V_p) = k_1 \cos 2\theta$$

dır.

İSPAT :

$V_p \in T_M(p)$ ve $T_M(p)$ nin bir bazı $\{X_1 , X_2\}$ asli vektörler olsun. O zaman

$$V_p = \cos\theta\, X_1 + \sin\theta\, X_2$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$k_n(V_p) = \langle S(V_p), V_p \rangle$$

$$= \langle S(\cos\theta\, X_1 + \sin\theta\, X_2), \cos\theta\, X_1 + \sin\theta\, X_2 \rangle$$

$$= k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \qquad (2.2.1)$$

bulunur. M minimal olduğundan

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \quad , \quad k_2 = -k_1$$

dir. Bulunan bu değeri (2.2.1) de yerine yazarsak;

$$k_n(V_p) = k_1 \cos^2\theta - k_1 \sin^2\theta$$

$$= k_1 \cos 2\theta$$

elde edilir.

TANIM 2.2.2 (Asimtotik Eğri):

M, bir hiperyüzey ve

$$\alpha : I \subset IR \longrightarrow M$$

bir eğri olsun. Eğer α eğrisi için,

$$\langle S(\alpha'(t)), \alpha'(t)\rangle = 0$$

özeliği sağlanıyorsa α ya M üzerinde bir asimtotik eğri denir [2].

TEOREM 2.2.2:

M, E^3 de bir minimal yüzey olsun.

$$\alpha : I \subset IR \longrightarrow M$$

eğrisinin asimtotik olması için gerek ve yeter şart; α eğrisinin yüzeyin asli doğrultuları ile $(2k+1)\pi/4$ açısı yapmasıdır.

İSPAT :

M, minimal olduğundan sonuç(2.2.1) den

$$k_n(\alpha'(s)) = \langle S(\alpha'(s)), \alpha'(s)\rangle$$

$$= k_1 \cos 2\theta \qquad (2.2.2)$$

olur.

α asimtotik eğri olsun. O zaman (2.2.2) den

$$\cos 2\theta = 0$$

ve

$$\theta = (2k+1)\pi/4$$

bulunur.

Tersine; $\theta = (2k+1)\pi/4$ olduğunu kabuledelim. Bu durumda

$$k_n(\alpha'(s)) = k_1 \cos 2(2k+1)\pi/4 = 0$$

bulunur ki, bu da α eğrisinin asimtotik olmasıdır.

BÖLUM 3

3.1. MİNİMAL HİPERYÜZEYLER İÇİN BAZI TEOREMLER

TEOREM 3.1.1 :

E^n de bir M kompakt hiperyüzey verilsin. O zaman $K(p) > 0$ olacak şekilde en az bir $p \in M$ noktası vardır [9] .

TEOREM 3.1.2:

M , E^n de bir minimal hiperyüzey olsun. $k_1, \dots, k_{n-1}$ ler de asli eğrilikler olmak üzere k_i lerden t-tanesi neğatif tanımlıdır ve t çift ise $K>0$, t tek ise $K<0$.

ISPAT :

M minimal olduğundan $\forall i$ için $k_i > 0$ veya $k_i < 0$ olamaz. Çunkü;

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} = 0$$

dır. Ayrıca $\forall i$ için $k_i \neq 0$ dır. Aksi taktirde en az bir i için $k_i = 0$ olsa, $K = 0$ olur ki bu da M nin hiper düzlem olması demektir. O halde t-tane k_i neğatif tanımlı olmak zorundadır. O zaman özel olarak neğatif tanımlı $k_1, \dots, k_t$ asli eğriliklerini alırsak; $k_j' = -k_j$, $1 \leq j \leq t$ olmak üzere

$$K = (-1)^t k_1' \dots k_t' k_{t+1} \dots k_{n-1}$$

olur. Buradan da görüldüğü gibi t çift ise $K>0$, t tek ise $K<0$ dır □

TEOREM 3.1.3 :

E^n de her noktasında neğatif tanımlı k_i asli eğriliklerinin sayısı tek olan, kompakt, minimal hiperyüzey yoktur.

İSPAT:

M nin; E^n de neğatif tanımlı asli eğriliklerinin sayısı tek olan, kompakt, minimal hiperyüzey olduğunu kabuledelim. Bu taktirde Teorem (3.1.2) den $p \in M$ için $K(p) < 0$ olur. Diğer taraftan Teorem (3.1.1) den biliyoruz ki E^n deki her kompakt hiperyüzey için $K(p) > 0$ olacak şekilde $\exists p \in M$ noktası vardır. Bu bir çelişkidir. Yani kabulümüz yanlıştır. Bu ise E^n de tek sayıda neğatif tanımlı, asli eğriliğe sahip, kompakt, minimal hi - peryüzeyin bulunmadığını gösterir $\square$

TEOREM 3.1.4 (Minimal Hiperyüzeyler için Euler Teoremi):

E^n de M, bir minimal hiperyüzey ve $X_1, \ldots, X_{n-1}$ asli doğrultular, bu asli doğrultulara karşılık gelen asli eğrilikler $k_1, \ldots, k_{n-1}$ olsun. $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$; $V_p \in T_M(p)$ vektörünün asli doğrultularıyla yaptığı açı lar olmak üzere

$$k_n(V_p) = \sum_{i \neq j=1}^{n-1} k_i \sin(\theta_i+\theta_j)\, \sin(\theta_j-\theta_i)$$

dir.

İSPAT :

$V_p \in T_M(p)$ alalım. O zaman

$$V_p = \cos\theta_1 X_1 + \cos\theta_2 X_2 + \ldots + \cos\theta_{n-1} X_{n-1}$$

yazılabilir. Buradan

$$S(V_p) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i \cos\theta_i X_i$$

$$\langle S(V_p), V_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} k_i \cos^2\theta_i = k_n(V_p) \qquad (3.1.1)$$

dir. Diğer taraftan M minimal olduğundan

$$k_j = -\sum_{i \neq j}^{n-1} k_i \qquad (3.1.2)$$

dir. Bu taktirde (3.1.1) den

$$k_n(V_p) = k_1\cos^2\theta_1 + k_2\cos^2\theta_2 + \ldots + k_{j-1}\cos^2\theta_{j-1}$$

$$+ k_{j+1}\cos^2\theta_{j+1} + \ldots + k_{n-1}\cos^2\theta_{n-1} + k_j\cos^2\theta_j$$

yazılır. (3.1.2) den de

$$k_n(V_p) = \sum_{i \neq j}^{n-1} k_i(\cos^2\theta_i - \cos^2\theta_j)$$

$$= \sum_{i \neq j}^{n-1} k_i \sin(\theta_i + \theta_j)\sin(\theta_j - \theta_i)$$

bulunur ▱

SONUÇ 3.1.1 :

Teorem (3.1.4) de

$$\theta_j = \mp\theta_1 = \mp\theta_2 = \ldots = \mp\theta_{j-1} = \mp\theta_{j+1} = \ldots = \mp\theta_{n-1}$$

ise V_p asimtotik doğrultudur.

İSPAT :

Teorem (3.1.4) den

$$k_n(V_p) = \sum_{i\neq J=1}^{n-1} k_i \sin(\theta_i + \theta_J)\sin(\theta_J - \theta_i) \cdots (3.1.3)$$

olduğundan , $\theta_J = \mp\theta_1 = \mp\theta_2 = \ldots = \mp\theta_{n-1}$ açılarını (3.1.3) de yerine yazarsak;

$$k_n(V_p) = 0$$

olur ki bu da $V_p \in T_M(p)$ nin asimtotik doğrultu olduğunu gösterir $\square$

TEOREM 3.1.5 :

M bir minimal yüzey ve X_p, $Y_p \in T_M(p)$ olsun. X_p ve Y_p nin, sırayla, asli doğrultularla yaptığı açılar θ_1, θ_2, θ_3, ... , θ_{n-1} ve $\theta_1 + \pi/2$, ... , $\theta_{n-1} + \pi/2$ ise k_n normal eğriliği göstermek üzere

$$k_n(X_p) = -k_n(Y_p)$$

dir.

İSPAT :

Teorem (3.1.4) den

$$k_n(X_p) = \sum_{i\neq J=1}^{n-1} k_i \sin(\theta_J + \theta_i)\sin(\theta_J - \theta_i) \quad (3.1.4)$$

elde edılir. Aynı şekilde

$$k_n(Y_p)=\sum_{i\neq J=1}^{n-1} k_i \sin(\theta_j+\pi/2+\theta_i+\pi/2)\sin(\theta_j+\pi/2-\theta_i-\pi/2)$$

$$=\sum_{i\neq J=1}^{n-1} k_i \sin(\theta_J+\theta_i+\pi)\ \sin(\theta_j-\theta_i)$$

$$=-\sum_{i\neq J=1}^{n-1} k_i \sin(\theta_J+\theta_i)\ \sin(\theta_J-\theta_i)$$

bulunur. (3.1.4) den

$$k_n(Y_p) = -k_n(X_p)$$

elde edılir.

KAYNAKLAR

[1] KOBAYASHI,S. and NOMIZU,K.
Foundations of Differential Geometry
Interscience Publıshers'a division of John Wiley and Sons,New York,London,volume 1, 1963,pp;8-9.

[2] HACISALİHOĞLU,H.H.
Diferensiyel Geometri (Baskıda)

[3] FLANDERS,H.
Differential Forms
Academic Press,New York,San Francisko,London 1963.

[4] SPIVAK,M.
Calculus on Manifolds
W.A.Benjamin,Inc.,New York,Amsterdam 1965.

[5] DO CARMO,M.P.
Differential Geometry of Curves and Surfaces
Prentice-Hall,Inc.,Englewood Cliffs,New Jersey 1976.

[6] ULUÇAY,C.
Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri
K.T.Ü.Temel Bilimler Fakültesi Yayınları , 1978.

[7] BLASCHKE,W. (Çeviren: ERİM,K.)
Diferensiyel Geometri Dersleri
İstanbul Üniversitesi Yayınları 1949 .

[8] ALTIN,A.
Hiperyüzeyler için Euler Teoremi (Doktora Tezi)
H.Ü. Temel Bilimler Fakültesi 1979.

[9] KELEŞ,S. and HACISALİHOĞLU,H.H.
On The Theory of Hypersurfaces
Journal of the Fac.of Sc. of the K,T,Ü. 1981 .

[10] GREUB,W.
Linear Algebra
Springer-Verlag ,New York,Heidelberg Berlin, 1975.

[11] OSSERMAN,R.
A Survey of Minimal Surfaces
Van Nostrand Reinhold,New York 1969.

NOTASYONLAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cismi
E^n	n-boyutlu Öklid Uzayı
$\langle , \rangle$	Reel vektör uzaylarının iç çarpım fonksiyonu
$\wedge$	Vektör uzaylarının dış çarpım fonksiyonu
$\in$	Eleman
$\forall$	Her
$\exists$	En az bir
$\Leftrightarrow$	Çift gerektirme
$\Rightarrow$	Gerektirme
$\subset$	Alt cümle
δ_{ij}	Kronecker deltası
$\chi(M)$	M nin vektör alanları uzayı
$\wedge^P(V)$	V üzerindeki P-vektörler uzayı
S	Weingarten dönüşümü (Şekil Operatörü)
S^t	S nin transpozu
S^*	S nin konjügesi
H	Ortalama eğrilik fonksiyonu
K	Gauss Eğrilik Fonksiyonu
k_n	Normal eğrilik fonksiyonu
∇_{U_i}	U_i yönündeki kovaryant türev