

## $e^{ax+by}$ Yoğunluklu $E_1^3$ Uzayında Sıfır Ağırlıklı Eğriliğe Sahip Null Olmayan Düzlemsel Eğrilerin Oluşturduğu Yüzeyler

Mustafa ALTIN<sup>1\*</sup>, Ahmet KAZAN<sup>2</sup>, H.Bayram KARADAĞ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Bingöl Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Bingöl, Türkiye

<sup>2</sup>Malatya Turgut Özal Üniversitesi, Doğanşehir Vahap Küçük Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri Bölümü, Malatya, Türkiye

<sup>3</sup>İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Malatya, Türkiye

Geliş / Received: 05/08/2019, Kabul / Accepted: 21/02/2020

### Öz

Bu çalışmada,  $e^{ax+by}$  yoğunluklu  $E_1^3$  Lorentz-Minkowski uzayında, ikisi aynı anda sıfır olmayan  $a$  ve  $b$  sabitlerinin durumlarına göre, ağırlıklı eğrilikleri sıfır olan spacelike ve timelike düzlemsel eğriler yardımıyla oluşturulan dönele yüzeyler ve regle yüzeyler çalışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Ağırlıklı eğrilik, yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayı, spacelike eğri, timelike eğri, dönele yüzey, regle yüzey.

### Surfaces Constructed by Non-Null Planar Curves with Vanishing Weighted Curvature in $E_1^3$ with Density $e^{ax+by}$

#### Abstract

In the present paper, the surfaces of revolution and ruled surfaces which are constructed with the aid of spacelike and timelike planar curves with vanishing weighted curvatures in Lorentz-Minkowski space  $E_1^3$  with density  $e^{ax+by}$  according to the cases of not all zero constants  $a$  and  $b$  are studied.

**Keywords:** Weighted curvature, Lorentz-Minkowski space with density, spacelike curve, timelike curve, surface of revolution, ruled surface.

### 1. Giriş ve Temel Kavramlar

Bir eğrinin eğriliği  $\kappa$  ve normal vektörü  $N$ ,  $n$ -boyutlu bir hiperyüzeyin ortalama eğriliği  $H$  ve normal vektör alanı da  $\eta$  olmak üzere,  $e^\varphi$  yoğunluklu manifoldlar üzerinde bir eğrinin ağırlıklı eğriliği ve  $n$ -boyutlu bir hiperyüzeyin ağırlıklı ortalama eğriliği kavramları Gromov tarafından, sırasıyla,

$$\kappa_\varphi = \kappa - \frac{d\varphi}{dN} \text{ ve } H_\varphi = H - \frac{1}{n-1} \frac{d\varphi}{d\eta}, \quad (1.1)$$

olarak verilmiştir (Gromov, 2003). Bu kavramlar verildikten sonra, farklı yoğunluklu

değişik uzaylarda ağırlıklı eğriler ve yüzeylerle ilgili pek çok çalışma geometriciler ve farklı disiplinlerden araştırmacılar tarafından yapılmıştır (Altın vd., 2019a ve b; Altın vd., 2020; Belarbi ve Belkhef, 2012; Corwin vd., 2006; Hieu ve Nam, 2013; Kazan ve Karadağ, 2018; Morgan, 2005; Morgan, 2006; Nam, 2017; Yoon vd., 2017; Yoon, 2017; Yoon ve Yüzbaşı, 2018; vb.).

$u = (u_1, u_2, u_3)$  ve  $v = (v_1, v_2, v_3)$  iki vektör alanı olmak üzere,

\*Sorumlu Yazar: maltin@bingol.edu.tr

$$\langle u, v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Minkowski metriğiyle birlikte  $E_1^3$ , Lorentz-Minkowski 3-uzayı olsun. Bu taktirde,  $E_1^3$  Lorentz-Minkowski uzayındaki bir  $u$  vektör alanına *spacelike* denir eğer  $\langle u, u \rangle > 0$  veya  $u = 0$  ise, *timelike* denir eğer  $\langle u, u \rangle < 0$  ise ve *lightlike(null)* denir eğer  $\langle u, u \rangle = 0$ ,  $u \neq 0$  ise.  $u$  vektör alanının pseudo-normu da  $\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$  şeklinde tanımlanır.  $I \subseteq \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere, keyfi bir  $\alpha = \alpha(u)$  eğrisine *spacelike*, *timelike* veya *lightlike(null)* denir, eğer  $\alpha'(u)$  hız vektörü, her  $u \in I$  için *spacelike*, *timelike* veya *lightlike(null)* ise. Bir  $\alpha$  eğrisine birim hızlı denir, eğer  $\|\alpha'\| = 1$  ise.

Ayrıca, eğer bir *spacelike* veya *timelike* yüzeyin lokal parametrelendirilmesi

$$\Gamma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E_1^3 \\ (u, v) \rightarrow \Gamma(u, v), \quad (1.2)$$

olarak alınır, bu taktirde bu yüzeyin birim normal vektör alanı  $\mathcal{N} = \frac{\Gamma_u \times \Gamma_v}{\|\Gamma_u \times \Gamma_v\|}$  ve birinci ve ikinci temel formların katsayıları da, sırasıyla,

$$E = \langle \Gamma_u, \Gamma_u \rangle, F = \langle \Gamma_u, \Gamma_v \rangle, G = \langle \Gamma_v, \Gamma_v \rangle \quad (1.3)$$

ve

$$L = \langle \mathcal{N}, \Gamma_{uu} \rangle, M = \langle \mathcal{N}, \Gamma_{uv} \rangle, N = \langle \mathcal{N}, \Gamma_{vv} \rangle \quad (1.4)$$

şekindedir. Burada, eğer  $\Omega = EG - F^2$  denilirse, bu durumda  $\Omega > 0$  iken yüzey *spacelike*,  $\Omega < 0$  iken de yüzey *timelike* tır ve  $\langle \mathcal{N}, \mathcal{N} \rangle = \varepsilon$ ,

$$\|\Gamma_u \times \Gamma_v\| = \sqrt{-\varepsilon(EG - F^2)} = \sqrt{-\varepsilon\Omega} \quad (1.5)$$

dır. Yüzeyin ortalama ve Gaussian eğrilikleri de bu eşitlikler yardımıyla, sırasıyla,

$$H = \varepsilon \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} \quad \text{ve} \quad K = \varepsilon \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (1.6)$$

şeklinde elde edilir (López, 2014).

Bununla birlikte Lorentz-Minkowski uzayında bir dönel yüzey, keyfi bir eğrinin keyfi bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilir. Bu bağlamda, *timelike*  $x_1 = (1,0,0)$  eksen, *spacelike*  $x_2 = (0,1,0)$  ve  $x_3 = (0,0,1)$  eksenleri ve  $(1,1,0)$  vektörü

tarafından gerilen  $(x_1, x_2)$ -düzleminin bir *lightlike* doğrusu etrafındaki dönmeyi oluşturan dönme matrisleri, sırasıyla,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & -\sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh v & 0 & \sinh v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh v & 0 & \cosh v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

ve

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1 - \frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

şekindedir.

Diğer taraftan bir regle yüzey, bir  $l$  doğrusunun bir  $\alpha(u)$  eğrisi boyunca hareket ettirilmesiyle oluşan bir yüzeydir.  $l$  üreteç doğrusunun farklı pozisyonlarına yüzeyin doğrultmanları denir. Dolayısıyla, bir regle yüzey

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u), \quad u, v \in I \subset \mathbb{R} \quad (1.9)$$

şeklinde bir parametrelendirmeye sahiptir. Burada  $\alpha(u)$ 'ya taban(baz) eğrisi,  $X(u)$ 'ya ise  $l$ 'nin doğrultman vektörü denir. Tanjant düzlemi belirli bir doğrultman boyunca sabit olan regle yüzeye açılabilir yüzey, aksi taktirde ise aykırı yüzey denir.

Ayrıca, bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart  $c = 0$  veya  $K = 0$  olmasıdır. Burada  $c = -\det(T, X, D_T X)$ ,  $T$  taban eğrisi olan  $\alpha$ 'nın teğet vektörü ve  $K$  da regle yüzeyin Gaussian eğriliğidir.

Bir regle yüzeyin striksiyon eğrisi ve distribüsyon parametresi, sırasıyla,

$$\gamma(u) = \alpha(u) - \frac{\langle \alpha'(u), X'(u) \rangle}{\|X'(u)\|^2} X(u) \quad (1.10)$$

ve

$$\delta = \frac{\det[\alpha'(u), X(u), X'(u)]}{\|X'(u)\|^2} \quad (1.11)$$

şeklinde verilir.

Eğer  $\langle X'(u), X'(u) \rangle = 0$  ise, bu taktirde *timelike* regle yüzey bir silindirdir ve bu durumda regle yüzeyin striksiyon eğrisi de  $\gamma(u) = \alpha(u)$ 'dur. Dönel yüzeyler ve regle

yüzeyler ile ilgili detaylı bilgi için, (Dillen vd., 1990; Kazan ve Karadağ, 2011; López, 2014; Ekici and Öztürk, 2013; Turgut and Hacısalihoğlu, 1998; vb.) çalışmalara bakılabilir.

## 2. $e^{ax+by}$ Yoğunluklu $E_1^3$ Uzayında Sıfır Ağırlıklı Eğriliğe Sahip Null Olmayan Düzlemsel Eğriler

Burada,  $e^{ax+by}$  yoğunluklu  $E_1^3$ 'de null olmayan (spacelike ve timelike) eğrilerin ağırlıklı eğriliklerini hesaplayarak, ağırlıklı eğrilikleri sıfır olan eğrileri elde edeceğiz. Ayrıca, elde edilen bu eğrilerin null olmayan Smarandache eğrilerini oluşturacağız.

**1. Durum:**  $\alpha$  düzlemsel eğrisi spacelike olsun.

Bu durumda,  $\alpha(u)$  eğrisinin  $T(u)$  teğet vektörü,  $N(u)$  normal vektörü,  $B(u)$  binormal vektörü ve eğriliği, sırasıyla,

$$\begin{aligned} T(u) &= \frac{(x'(u), y'(u), 0)}{\sqrt{y'(u)^2 - x'(u)^2}}, \\ N(u) &= \frac{(-y'(u), -x'(u), 0)}{\sqrt{y'(u)^2 - x'(u)^2}}, \\ B(u) &= (0, 0, 1), \\ \kappa(u) &= \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u)}{(y'(u)^2 - x'(u)^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

dir. Böylece,  $e^{ax+by}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında spacelike  $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$  eğrisinin  $\kappa_\varphi(u)$  ağırlıklı eğriliği

$$\kappa_\varphi(u) = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) - (y'(u)^2 - x'(u)^2)(ay'(u) - bx'(u))}{(y'(u)^2 - x'(u)^2)^{3/2}} \quad (2.2)$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla,

**Önerme 1.**  $e^{ax+by}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında  $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$  spacelike eğrisinin  $\kappa_\varphi(u)$  ağırlıklı eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} x'(u)y''(u) + ay'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) \\ = x''(u)y'(u) + bx'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) \end{aligned}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Şimdi, ikisi aynı anda sıfır olmayan  $a$  ve  $b$  sabitlerinin farklı değerleri için (2.2) eşitliğinin değişik durumlarını ele alacağız.

İlk olarak,  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  olduğunu kabul edelim.

Bu durumda (2.2)'den,

$$\kappa_\varphi(u) = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) - ay'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2)}{(y'(u)^2 - x'(u)^2)^{3/2}}$$

olur. O halde,

**Önerme 2.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında  $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$  spacelike eğrisinin  $\kappa_\varphi(u)$  ağırlıklı eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) = x''(u)y'(u) - ay'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) \quad (2.3)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

(2.3) ifadesinde  $x'(u) = 0$  alınırsa,  $y'(u) = 0$  olur ve yine (2.3) ifadesinde  $x'(u) \neq 0$  alınırsa,  $c_1 < 0$  ve  $e^{2ax(u)} + c_1 > 0$  olmak üzere

$$y(u) = c_2 \pm \frac{\ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{a}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

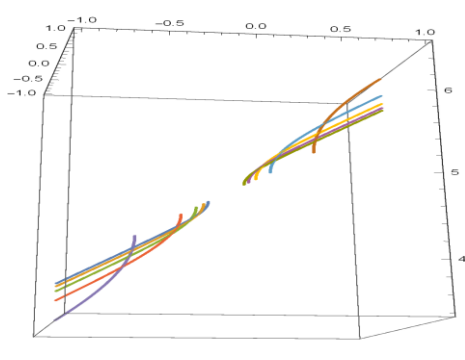
ifadesi, (2.3) denklemin çözümlerinden biri olur. Böylece,

**Teorem 1.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan bir  $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$  spacelike eğrisi,  $c_1 < 0$  ve  $e^{2ax(u)} + c_1 > 0$  olmak üzere

$$\alpha(u) = \left( x(u), c_2 \pm \frac{\ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{a}, 0 \right), \quad (2.4)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , şeklinde parametrelendirilebilir.

Şekil 1,  $x(u) = u$ ,  $c_1 = -3$ ,  $c_2 = 5$  ve  $a = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$  için (2.4) spacelike eğrilerine örnektir.



Şekil 1

Ayrıca, Smarandache geometrisinde önemli bir yeri olan Smarandache eğrileri, bir eğrinin Frenet çatısı yardımıyla elde edilir. Eğer bir eğrinin  $TN$ -Smarandache eğrisini  $S_{TN}$  ile,  $TB$ -Smarandache eğrisini  $S_{TB}$  ile,  $NB$ -Smarandache eğrisini  $S_{NB}$  ile ve  $TNB$ -Smarandache eğrisini de  $S_{TNB}$  ile gösterirsek, bu takdirde bu eğriler, sırasıyla,

$$S_{TN}(u) = \frac{T(u) + N(u)}{\|T(u) + N(u)\|}, \quad S_{TB}(u) = \frac{T(u) + B(u)}{\|T(u) + B(u)\|}$$

$$S_{NB}(u) = \frac{N(u) + B(u)}{\|N(u) + B(u)\|} \quad \text{ve} \quad S_{TNB}(u) = \frac{T(u) + N(u) + B(u)}{\|T(u) + N(u) + B(u)\|}$$

şeklinde elde edilirler. Smarandache eğrileri ile ilgili detaylı bilgiye, (Abdel-Aziz and Saad, 2015; Ali, 2010; Şenyurt vd., 2020; Turgut and Yilmaz, 2008; vb.) çalışmalarından ulaşılabilir.

Şimdi, (2.4) spacelike eğrisinin Frenet vektörlerini kullanarak Smarandache eğrilerini oluşturacağız.

$c_1 < 0$  ve  $e^{2ax(u)} + c_1 > 0$  olmak üzere, (2.4) eğrisinin Frenet vektörleri,

$$T = \left( \frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1}}, 0 \right),$$

$$N = \left( \frac{-e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{-\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, 0 \right), \quad (2.5)$$

$$B = (0,0,1)$$

dir. (2.5) eşitliklerinden,  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike eğrisinin  $TB$ -

Smarandache eğrisi  $S_{TB}$  ve  $TNB$ -Smarandache eğrisi  $S_{TNB}$ , sırasıyla,

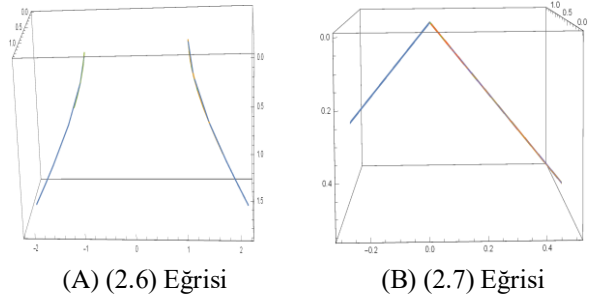
$$S_{TB}(u) = \left( \frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.6)$$

ve

$$S_{TNB}(u) = \left( \frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)}}{\sqrt{-c_1}}, \frac{e^{ax(u)} - \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{\sqrt{-c_1}}, 1 \right) \quad (2.7)$$

olarak elde edilirler. Burada şunu belirtelim ki,  $TN$ -Smarandache eğrisi  $S_{TN}$  ve  $NB$ -Smarandache eğrisi  $S_{NB}$  null eğriler olduklarından göz önüne alınmamışlardır.

Şekil 2(A)'da  $x(u) = \ln u$ ,  $c_1 = -3$  ve  $a = 1, 2, 3, 4, 5$  için (2.6) eğrisi ve Şekil 2(B)'de ise  $x(u) = u$ ,  $c_1 = -3$  ve  $a = 1, 2, 3, 4, 5$  için (2.7) eğrisi görülebilir.



(A) (2.6) Eğrisi

(B) (2.7) Eğrisi

Şekil 2

Şimdi de  $b \neq 0$ ,  $a = 0$  olduğunu varsayalım. Bu takdirde, (2.2)'den

$$\kappa_\varphi(u) = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) + bx'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2)}{(y'(u)^2 - x'(u)^2)^{3/2}}$$

ifadesine sahip oluruz. Böylece,

**Önerme 3.**  $e^{by}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında  $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$  spacelike eğrisinin  $\kappa_\varphi(u)$  ağırlıklı eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şart

$$x'(u)y''(u) = x''(u)y'(u) + bx'(u)(y'(u)^2 - x'(u)^2) \quad (2.8)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Eğer  $x'(u) = 0$  alınırsa, bu takdirde (2.8)'den,

$$\alpha(u) = (k_1, y(u), 0), \quad k_1 \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

olur. Eğer  $x''(u) = 0$  ve  $x'(u) \neq 0$  ise, yine (2.8)'den,

$$\alpha(u) = \left( k_2 u + k_3, k_4 - \frac{\ln(\cosh(bk_2 u - k_5 k_2))}{b}, 0 \right), (2.10)$$

$k_2, k_3, k_4, k_5 \in \mathbb{R}, k_2 \neq 0$ , elde edilir. Fakat elde edilen (2.10) eğrisi spacelike değildir.

$x''(u) \neq 0$  alınrsa, (2.8)'den

$$\alpha(u) = \left( k_6 \pm \frac{\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1+k_7 e^{2by(u)}}\right)}{b}, y(u), 0 \right), (2.11)$$

$k_6, k_7 \in \mathbb{R}$ , bulunur ve yine bu durumda da (2.11) eğrisi spacelike değildir. O halde,

**Teorem 2.**  $e^{by}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan  $\alpha(u)$  spacelike eğrisi (2.9) ile parametrelendirilebilir.

**Sonuç 1.**  $e^{by}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan  $\alpha(u)$  spacelike eğrisi  $b$  sabitinin seçiminden bağımsızdır.

**2. Durum:**  $\alpha$  düzlemsel eğrisi timelike olsun.

Bu durumda,  $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$  timelike eğrisinin Frenet vektörleri ve eğriliği

$$T = \frac{(x'(u), y'(u), 0)}{\sqrt{x'(u)^2 - y'(u)^2}},$$

$$N = \frac{(y'(u), x'(u), 0)}{\sqrt{x'(u)^2 - y'(u)^2}}, \quad (2.12)$$

$$B = (0, 0, 1),$$

$$\kappa = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u)}{(x'(u)^2 - y'(u)^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir. Bu eğrinin  $\kappa_\varphi(u)$  ağırlıklı eğriliği

$$\kappa_\varphi(u) = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u) - (x'(u)^2 - y'(u)^2)(-ay'(u) + bx'(u))}{(x'(u)^2 - y'(u)^2)^{3/2}} \quad (2.13)$$

dir.

1. Durum'a benzer işlemlerle aşağıdaki teorem elde edilebilir:

**Teorem 3.**  $e^{ax}$  ve  $e^{by}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan  $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$  timelike eğrisi,  $d_3 < 0$  ve  $e^{2by(u)} + d_3 > 0$  olmak üzere, sırasıyla,

$$\alpha(u) = (x(u), d_1, 0), d_1 \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

ve

$$\alpha(u) = \left( d_2 \pm \frac{\ln\left(e^{by(u)} + \sqrt{e^{2by(u)} + d_3}\right)}{b}, y(u), 0 \right), (2.15)$$

$d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ , şeklinde parametrelendirilebilir.

**Sonuç 2.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan  $\alpha(u)$  timelike eğrisi  $a$  sabitinin seçiminden bağımsızdır.

### 3. $e^{ax+by}$ Yoğunluklu Lorentz-Minkowski Uzayında Sıfır Ağırlıklı Eğriliğe Sahip Null Olmayan Düzlemsel Eğriler Tarafından Oluşturulan Dönel Yüzeyler

Bu bölümde,  $e^{ax}$  ve  $e^{by}$  yoğunluklu  $E_1^3$  uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan spacelike ve timelike eğriler tarafından oluşturulan dönel yüzeyleri oluşturacağız. Bu yüzeylerin ortalama ve Gaussian eğriliklerini elde ederek bazı karakterizasyonlar vereceğiz ve bu yüzeylerin grafiklerine dair bazı örnekler sunacağız.

İlk olarak, (2.4) spacelike eğrisinin, oluşturulacak olan dönel yüzeyin profil eğrisi olduğunu varsayalım ((2.4) eğrisindeki " $\pm$ " işareti bundan sonra "+" olarak ele alınacaktır).

Eğer dönme eksenini spacelike ise, bu taktirde (1.7) ve (2.4)'ten,  $M$  dönel yüzeyi

$$X(u, v) = \left( x(u) \cosh(v), c_2 + \frac{\ln\left(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}\right)}{a}, x(u) \sinh(v) \right) \quad (3.1)$$

şeklinde parametrelendirilebilir.

(3.1) yüzeyinin normali

$$\mathcal{N} = -\frac{1}{\sqrt{-c_1}} \left( e^{ax(u)} \cosh(v), \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}, e^{ax(u)} \sinh(v) \right) \quad (3.2)$$

dir ve burada  $\langle \mathcal{N}, \mathcal{N} \rangle = \varepsilon = -1$  olup, (3.1) spacelike bir yüzeydir.

Dolayısıyla, (1.6) ile verilen formüller için gerekli işlemler yapılırsa, (3.1) yüzeyinin Gaussian ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{ae^{2ax(u)}}{c_1 x(u)} \quad (3.3)$$

ve

$$H = \frac{-e^{ax(u)}(1+ax(u))}{2x(u)\sqrt{-c_1}} \quad (3.4)$$

olarak elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremler verilebilir:

**Teorem 4.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (3.1) dönele yüzeyi flat değildir. Ayrıca, (3.1) dönele yüzeyinin Gaussian eğriliği  $ax(u) < 0$  iken pozitif,  $ax(u) > 0$  iken negatiftir.

**Teorem 5.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (3.1) dönele yüzeyi minimal değildir. Ancak, (3.1) dönele yüzeyinin ortalama eğriliği  $x(u) = \frac{-1}{a}$  için sıfırdır.

$H$  bir yüzeyin ortalama eğriliği ve  $K$  da Gaussian eğriliği olmak üzere,  $H$  ve  $K$  arasında  $\Phi(H, K) = 0$  şeklinde aşikar olmayan bir ilişki varsa, bu yüzeye Weingarten yüzey denildiğini biliyoruz (Dillen ve Kühnel, 1999). O halde,

**Teorem 6.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (3.1) dönele yüzeyi

$$c_1(K + 2H^2 \pm 2H\sqrt{K+H^2}) + a^2 e^{2\left(\frac{K+2H^2 \pm 2H\sqrt{K+H^2}}{-K}\right)} = 0 \quad (3.5)$$

veya

$$\frac{2\sqrt{-c_1}H(K+2H^2 \pm 2H\sqrt{K+H^2})}{a(2H^2 \pm 2H\sqrt{K+H^2})} + e^{\frac{K+2H^2 \pm 2H\sqrt{K+H^2}}{-K}} = 0 \quad (3.6)$$

ilişkilerini sağlayan bir Weingarten yüzeydir.

**İspat.** (3.3) ve (3.4)'ten,

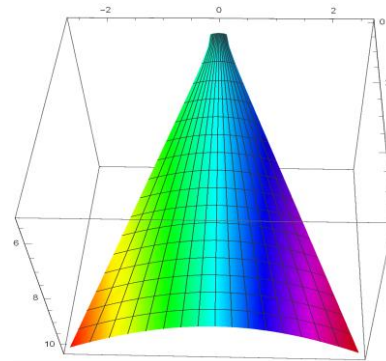
$$\frac{H^2}{K} = \frac{(1+ax(u))^2}{-4ax(u)}$$

ifadesine ve dolayısıyla

$$x(u) = \frac{K+2H^2 \pm 2H\sqrt{K+H^2}}{-aK} \quad (3.7)$$

eşitliğine sahip oluruz. (3.7) ifadesi (3.3) ve (3.4)'te kullanılırsa, sırasıyla (3.5) ve (3.6) ifadelerine sahip oluruz. Bu da ispatı tamamlar. ■

Şekil 3'te  $x(u) = u$ ,  $c_1 = -3$ ,  $c_2 = 5$  ve  $a = 2$  için (3.1) dönele yüzeyi görülebilir.



Şekil 3

Şimdi de dönme ekseninin timelike olduğunu varsayalım. (1.7) ve (2.4)'ten,  $M$  dönele yüzeyi

$$X(u, v) = \left( \begin{array}{l} x(u), \left( c_2 + \frac{\ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{a} \right) \cos v, \\ \left( c_2 + \frac{\ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{a} \right) \sin v \end{array} \right) \quad (3.8)$$

şeklinde parametrelendirilebilir. (3.8) dönele yüzeyinin normal vektörü

$$\mathcal{N} = -\frac{1}{\sqrt{-c_1}} \left( e^{ax(u)}, \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \cos(v), \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \sin(v) \right) \quad (3.9)$$

olup  $\langle \mathcal{N}, \mathcal{N} \rangle = \varepsilon = -1$  dir ve dolayısıyla (3.8) spacelike bir yüzeydir.

Böylece (3.8) yüzeyinin Gaussian ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{a^2 e^{ax(u)} \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{a c_1 c_2 + c_1 \ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})} \quad (3.10)$$

ve

$$H = -a \left( \frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{2\sqrt{-c_1}(a c_2 + \ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}))} + \frac{e^{ax(u)}}{2\sqrt{-c_1}} \right) \quad (3.11)$$

olarak bulunur. O halde,

**Teorem 7.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (3.8) dönel yüzeyi flat değildir. Ayrıca, (3.8) yüzeyinin Gaussian eğriliği pozitiftir (negatiftir) eğer

$$e^{ac_2} \left( e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right) < 1 (> 1)$$

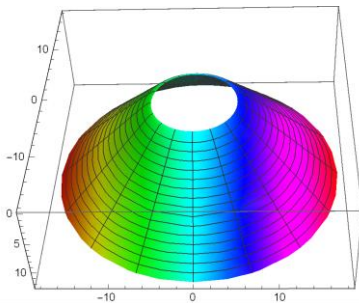
ise.

**Teorem 8.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (3.8) dönel yüzeyi minimal değildir. Ancak, (3.8) dönel yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\left( e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} \right) \left( e^{ac_2 + \frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{e^{ax(u)}}} \right) = 1$$

iken sıfırdır.

Şekil 4,  $x(u) = u$ ,  $c_1 = -3$ ,  $c_2 = 5$  ve  $a = 2$  için (3.8) dönel yüzeyine bir örnektir.



Şekil 4

Son olarak, dönme ekseninin lightlike olduğunu kabul edelim. (1.8) ve (2.4)'ten,  $M$

yüzeyi

$$X(u, v) = \left( \left(1 + \frac{v^2}{2}\right) x(u) - \frac{v^2}{2} \left( c_2 + \frac{\ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{a} \right), \right. \\ \left. \frac{v^2}{2} x(u) + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) \left( c_2 + \frac{\ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{a} \right), \right. \\ \left. v \left( x(u) - \left( c_2 + \frac{\ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{a} \right) \right) \right) \quad (3.12)$$

olarak parametrelendirilebilir. (3.12) dönel yüzeyinin normal vektörü

$$N = -\frac{1}{2\sqrt{-c_1}} \left( \frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} v^2 - e^{ax(u)} (2 + v^2), -e^{ax(u)} v^2 + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} (v^2 - 2), \right) v \quad (3.13)$$

dir. (3.13)'ten,  $\langle N, N \rangle = \varepsilon = -1$ 'dir ve bu nedenle, (3.12) spacelike bir yüzeydir.

Dolayısıyla, (3.12) dönel yüzeyinin Gaussian ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{a^2 e^{ax(u)} (\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)})}{c_1 (a c_2 + \ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}) - ax(u))} \quad (3.14)$$

ve

$$H = a \left( \frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)}}{2\sqrt{-c_1}(a c_2 + \ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}) - ax(u))} + \frac{e^{ax(u)}}{2\sqrt{-c_1}} \right) \quad (3.15)$$

şeklinde elde edilir. Böylece, şu teoremler verilebilir:

**Teorem 9.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (3.12) dönel yüzeyi flat değildir. Ayrıca, (3.8) yüzeyinin Gaussian eğriliği pozitiftir (negatiftir) eğer

$$\left( \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} + e^{ax(u)} \right) > e^{ax(u) - ac_2} (< e^{ax(u) - ac_2})$$

ise.

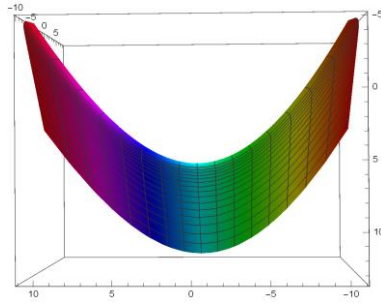
**Teorem 10.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (3.12) dönel yüzeyi minimal değildir. Ancak (3.12) dönel yüzeyinin ortalama eğriliği

$$e^{ax(u)} - ax(u) = e^{1 - \frac{\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1}}{e^{ax(u)}} - ac_2}$$

iken sıfırdır.



Şekil 5'te,  $x(u) = u^3$ ,  $c_1 = -3$ ,  $c_2 = 5$  ve  $a = 2$  için (3.12) dönele yüzeyi görülebilir.



Şekil 5

Diğer taraftan, eğer  $e^{by}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.15) timelike düzlemsel eğrisinin dönele yüzeyi oluşturduğunu varsayarsak, sonuçlar yukarıdakine benzer şekilde elde edilebilir.

#### 4. Taban Eğrileri (2.4) ve Doğrultmanları da (2.4) Eğrisinin Smarandache Eğrileri olan Regle Yüzeyler

Bu bölümde, ilk olarak  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi ve bu eğrinin (2.6) ve (2.7) Smarandache eğrileri tarafından oluşturulan regle yüzeyleri elde edeceğiz. Ardından, bu regle yüzeylerin Gaussian ve ortalama eğriliklerini, distribüsyon parametrelerini ve striksiyon eğrilerini elde ederek bu yüzeyler için bazı karakterizasyonlar vereceğiz. Son olarak da, bu regle yüzeyleri görselleştirmek için grafiklerini çizeceğiz.

Bu bölüm boyunca, regle yüzeylerin taban eğrileri olarak (2.4) eğrisi alınacaktır.

İlk olarak kabul edelim ki, regle yüzeyin doğrultmanı (2.4) eğrisinin  $TB$ -Smarandache eğrisi  $S_{TB}(u)$  olsun. Bu durumda (1.9), (2.4) ve (2.6)'dan,  $\varphi_{TB}(u, v)$  regle yüzeyi

$$\varphi_{TB}(u, v) = \alpha(u) + vS_{TB}(u) \quad (4.1)$$

$$= (x(u) + \frac{v\sqrt{e^{2ax(u)+c_1}}}{\sqrt{-2c_1}},$$

$$c_2 + \frac{\ln(e^{ax(u)+\sqrt{e^{2ax(u)+c_1}}}}{a} + \frac{ve^{ax(u)}}{\sqrt{-2c_1}}, \frac{v}{\sqrt{2}})$$

şeklinde parametrelendirilebilir.

Bu yüzeyin normal vektörü,

$$\mathcal{N} = \left( \frac{-e^{ax(u)}(2\sqrt{-c_1}+2\sqrt{a}\sqrt{e^{2ax(u)+c_1}}v)}{2\sqrt{-c_1}\sqrt{v^2a^2e^{2ax(u)+c_1}}}, \quad (4.2)$$

$$-\frac{2\sqrt{-c_1}\sqrt{e^{2ax(u)+c_1}}+v\sqrt{2}ave^{2ax(u)}}{2\sqrt{-c_1}\sqrt{v^2a^2e^{2ax(u)+c_1}}},$$

$$\frac{ave^{ax(u)}}{\sqrt{2}\sqrt{v^2a^2e^{2ax(u)+c_1}}}$$

dir. (4.2)'den  $\langle \mathcal{N}, \mathcal{N} \rangle = \varepsilon = 1$  dir ve dolayısıyla (4.1) timelike bir yüzeydir.

O halde, (4.1) regle yüzeyinin Gaussian ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = -\frac{a^2c_1e^{2ax(u)}}{(c_1+a^2v^2e^{2ax(u)})^2} \quad (4.3)$$

ve

$$H = \frac{va^2e^{ax(u)}(ave^{2ax(u)}-\sqrt{-2c_1}\sqrt{e^{2ax(u)+c_1}})}{2(v^2a^2e^{2ax(u)+c_1})^{3/2}} \quad (4.4)$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla,

**Teorem 11.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (4.1) regle yüzeyi flat ve minimal değildir. Ancak, (4.1) regle yüzeyinin ortalama eğriliği  $v = 0$  için sıfırdır.

Ayrıca (1.11)'den,  $\varphi_{TB}(u, v)$  regle yüzeyinin distribüsyon parametresi

$$\delta_{TB} = \frac{e^{2ax(u)+c_1}}{e^{ax(u)\sqrt{-c_1}}\sqrt{(ac_2+\ln(e^{ax(u)+\sqrt{e^{2ax(u)+c_1}}}))^2-(ax(u))^2}} \quad (4.5)$$

olarak elde edilir. O halde,

**Sonuç 3.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (4.1) regle yüzeyi açılabilir değildir.

(1.10)'dan,  $\varphi_{TB}(u, v)$  üzerinde  $\gamma_{TB}(u)$  striksiyon eğrisinin parametrizasyonu

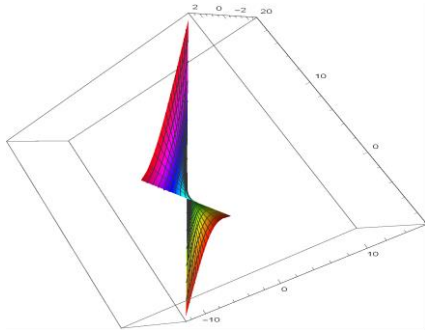
$$\gamma_{TB}(u) = \alpha(u) \quad (4.6)$$

dur. Buradan,

**Sonuç 4.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (4.1) regle yüzeyinin taban eğrisi ve striksiyon eğrisi çakışır.



Şekil 6'da,  $x(u) = \ln u$ ,  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 3$  ve  $a = 1$  için (4.1) regle yüzeyi görülebilir.



Şekil 6

Şimdi de, regle yüzeyin doğrultmanının (2.4) eğrisinin TNB-Smarandache eğrisi  $S_{TNB}(u)$  olduğunu varsayalım. Bu durumda (1.9), (2.4) ve (2.7)'den,  $\varphi_{TNB}(u, v)$  regle yüzeyi  $\varphi_{TNB}(u, v) = \alpha(u) + vS_{TNB}(u)$  (4.7)

$$= (x(u) + \frac{v(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)})}{\sqrt{-c_1}}, c_2 + \frac{\ln(e^{ax(u)} + \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{a} + \frac{v(e^{ax(u)} - \sqrt{e^{2ax(u)} + c_1})}{\sqrt{-c_1}}, v)$$

şeklinde parametrelendirilebilir.

Bu yüzeyin normal vektörü

$$\mathcal{N} = \left( \frac{-ave^{2ax(u)}(\sqrt{-c_1} + av(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)}))}{\sqrt{2}(av\sqrt{-c_1}e^{ax(u)})^{3/2}}, \frac{\sqrt{-c_1}\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - ae^{ax(u)}(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - e^{ax(u)})}{\sqrt{2}\sqrt{-c_1}av\sqrt{-c_1}e^{ax(u)}}, \frac{\sqrt{-c_1}}{\sqrt{2}av\sqrt{-c_1}e^{ax(u)}} \right) \quad (4.8)$$

dir ve dolayısıyla  $\langle \mathcal{N}, \mathcal{N} \rangle = \varepsilon = 1$  olup, (4.7) timelike bir yüzeydir.

Dolayısıyla, (4.7) regle yüzeyinin Gaussian ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{1}{4v^2} \quad (4.9)$$

ve

$$H = -\frac{ae^{ax(u)}\left(c_1 + av\sqrt{-c_1}\left(\sqrt{e^{2ax(u)} + c_1} - 2e^{ax(u)}\right)\right)}{4\sqrt{2}(av\sqrt{-c_1}e^{ax(u)})} \quad (4.10)$$

şeklinde elde edilir. O halde,

**Teorem 12.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (4.7) regle yüzeyi flat ve minimal değildir.

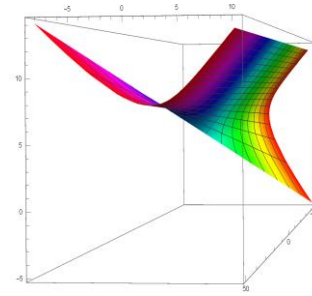
(1.10)'dan,  $\varphi_{TNB}(u, v)$  üzerinde  $\gamma_{TNB}(u)$  striksiyon eğrisinin parametrelendirilmesi

$$\gamma_{TNB}(u) = \alpha(u) \quad (4.11)$$

dir. Dolayısıyla,

**Sonuç 5.**  $e^{ax}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.4) spacelike düzlemsel eğrisi tarafından oluşturulan (4.7) regle yüzeyinin taban eğrisi ve striksiyon eğrisi çakışır.

Şekil 7,  $x(u) = u$ ,  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 3$  ve  $a = 1$  için (4.7) regle yüzeyine bir örnektir.



Şekil 7

Taban eğrileri  $e^{by}$  yoğunluklu Lorentz-Minkowski uzayında ağırlıklı eğriliği sıfır olan (2.15) timelike düzlemsel eğrisi ve doğrultmanları da (2.15)'in Smarandache eğrileri olan regle yüzeyler için karakterizasyonlar, yukarıdakine benzer şekilde elde edilebilir.

**Teşekkür.** Bu çalışma, İnönü Üniversitesi (Malatya, Türkiye) BAP birimi tarafından FDK-2018-1349 Proje Numarası ile desteklenmektedir. İnönü Üniversitesi BAP birimine ve BAP komisyonuna teşekkür ederiz.

## 5. Kaynaklar

Abdel-Aziz, H.S. and Saad, M.K. 2015. "Smarandache Curves of Some Special

- Curves in the Galilean 3-Space”, *Honam Mathematical Journal*, 37(2), 253-264.
- Albuje, A.L. and Caballero, M. 2017. “Geometric Properties of Surfaces with the Same Mean Curvature in  $R^3$  and  $L^3$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, 445, 1013-1024.
- Ali, A.T. 2010. “Special Smarandache Curves in the Euclidean Space”, *Int. J. Math. Comb.*, 2, 30-36.
- Ali, A.T. 2012. “Position Vectors of curves in the Galilean Space  $G_3$ ”, *Matematnykn Bechnk*, 64(3), 200–210.
- Altın, M., Kazan, A. and Karadağ, H.B. 2019a. “Rotational Surfaces Generated by Planar Curves in  $E^3$  with Density”, *Int. J. Anal. Appl.*, 17(3), 311-328.
- Altın, M., Kazan, A. and Karadağ, H.B. 2019b. “Ruled Surfaces in  $E^3$  with Density”, *Honam Mathematical Journal*, 41(4), 683-695.
- Altın, M., Kazan, A. and Karadağ, H.B. 2020. “Monge Hypersurfaces in Euclidean 4-Space with Density”, *Journal of Polytechnic*, 23(1): 207-214.
- Baikoussis, C. and Blair, D.E. 1992. “On the Gauss map of ruled surfaces”, *Glasgow Math. J.*, 34, 355-359.
- Belarbi, L. and Belkhelfa, M. 2012. “Surfaces in  $R^3$  with Density”, *i-manager’s Journal on Mathematics*, 1(1), 34-48.
- Choi, J.H., Kim, Y.H. and Ali, A.T. 2012. “Some associated curves of Frenet non-lightlike curves in  $E_1^3$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, 394, 712–723.
- Corwin, I., Hoffman, N., Hurder, S., Sesum, V. and Xu, Y. 2006. “Differential geometry of manifolds with density”, *Rose-Hulman Und. Math. J.*, 7(1), 1-15.
- Dillen, F., Pas, J. and Verstraelen, L. 1990. “On the Gauss map of surfaces of revolution”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 18, 239-246.
- Dillen, F. and Kühnel, W. 1999. “Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space”, *Manuscripta Math.*, 98, 307–320.
- Divjak, B. 1998. “Curves in Pseudo-Galilean Geometry”, *Annales Univ. Sci. Budapest.*, 41, 117-128.
- Ekici, C. and Öztürk, H. 2013. “On Time-Like Ruled Surfaces in Minkowski 3-Space”, *Universal Journal of Applied Science*, 1(2), 56-63.
- Gromov, M. 2003. “Isoperimetry of waists and concentration of maps”, *Geom. Func. Anal.*, 13, 178-215.
- Hieu, D.T. and Nam, T.L. 2013. “The classification of constant weighted curvature curves in the plane with a log-linear density”, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 13, 1641-1652.
- Kazan, A. and Karadağ, H.B. 2011. “A Classification of Surfaces of Revolution in Lorentz-Minkowski Space”, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 6, no. 39, 1915-1928.
- Kazan, A. and Karadağ, H.B. 2018. “Weighted Minimal and Weighted Flat Surfaces of Revolution in Galilean 3-Space with Density”, *Int. J. Anal. Appl.*, 16(3), 414-426.
- López, R. 2014. “Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space”, *Int. Electron. J. Geom.*, 1, 44–107.
- Morgan, F. 2005. “Manifolds with Density”, *Not. Amer. Math. Soc.*, 52(8), 853-858.
- Morgan, F. 2006. “Myers’ Theorem With Density”, *Kodai Math. J.*, 29, 455-461.
- Nam, T.L. 2017. “Some results on curves in the plane with log-linear density”, *Asian-European J. of Math.*, 10(2), 1-8.
- Şenyurt, S., Altun, Y. and Cevahir, C. 2020. “Smarandache curves for spherical indicatrix of the Bertrand curves pair”, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 38(2), In Press, 27-39.
- Turgut, A. and Hacısalıhoğlu, H.H. 1998. “Timelike Ruled Surfaces in the Minkowski 3-Space-II”, *Turk. J. of Math.*, 22, 33-46.
- Turgut, M. and Yılmaz, S. 2008. “Smarandache Curves in Minkowski Space-time”, *Int. J. Math. Comb.*, 3, 51-55.

Yoon, D.W., Kim, D-S., Kim, Y.H. and Lee, J.W. 2017. “Constructions of Helicoidal Surfaces in Euclidean Space with Density”, *Symmetry*, 173, 1-9.

Yoon, D.W. 2017. “Weighted Minimal Translation Surfaces in Minkowski 3-space with Density”, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 14(12), 1-10.

Yoon, D.W. and Yüzbaşı, Z.K. 2018. “Weighted Minimal Affine Translation Surfaces in Euclidean Space with Density”, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 15(11).